POINCARÉ, 1912-2012, Séminaire Poincaré XVI (2012) 135 – 171 **Séminaire Poincaré**

Poincaré et le hasard

Laurent MAZLIAK
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires
Université Pierre et Marie Curie
Paris, France

Résumé. Cet article concerne les travaux de Poincaré autour des probabilités. Bien que ce sujet n'ait pas représenté une grande part dans les œuvres du mathématicien, son étude apporte néanmoins des informations significatives sur l'évolution de Poincaré sur différents thèmes importants, comme les changement en physique impliqués par la mécanique statistique et les théories moléculaires. Après avoir décrit le contexte historique général de cette évolution, je me concentrerai sur différentes étapes importantes des textes de Poincaré concernant la théorie des probabilités et, en dernier lieu, j'aborderai la façon dont son héritage a pu être récupéré par la génération suivante.

Introduction

En 1906, Poincaré signa l'un des textes [1] les plus singuliers de sa carrière scientifique, un rapport écrit à la demande de la Cour de Cassation afin de boucler définitivement l'affaire Dreyfus. En 1904 en effet, dix ans après la condamnation et la dégradation du malheureux capitaine et tout ce qui s'en était suivi, le gouvernement était décidé à solder les dernières traces de cette lamentable histoire qui avait déchiré la France pendant des années et à obtenir la réhabilitation du jeune officier injustement martyrisé. Comme on le sait, l'accusation de 1894 s'était faite en l'absence totale de preuves matérielles, lors d'un procès bâclé et à charge complaisamment orchestré par la hiérarchie militaire pour fournir rapidement un coupable. Le seul document concret était le fameux bordereau récupéré dans la corbeille à papier de l'ambassade d'Allemagne et examiné à la hâte par quelques experts plus ou moins habilités dont l'un, Alphonse Bertillon, joua un rôle sinistre en se faisant dès lors l'accusateur le plus obstiné de Dreyfus. Il mit au point un abracadabrant échafaudage d'autoforgerie à coloration plus ou moins scientifique pour *prouver* la culpabilité de l'innocent. Bertillon s'enferma dans ses convictions, plus par bêtise et vanité que par véritable esprit partisan d'ailleurs. Quand l'Affaire éclata à la fin des années 1890 et que la machination politique devint évidente et l'innocence de Dreyfus manifeste, Bertillon compliqua à l'envie sa théorie prouvant la culpabilité. Ce délire lui attira d'ailleurs une avalanche d'ennuis et faillit lui coûter sa carrière. Pour le procès en Cassation, histoire de faire taire les dernières voix discordantes qui auraient pu s'élever, on décida pour le principe de ne pas laisser de côté les élucubrations de Bertillon et de demander à d'incontestables autorités académiques de se prononcer quant à la validité ou non des conclusions du soi-disant expert. Si trois mathématiciens furent convoqués pour ce travail, Paul Appel, Gaston Darboux et Henri Poincaré, qui cosignèrent conjointement le rapport à la Cour de Cassation en 1906, tout le monde savait bien que seul le dernier signataire en avait été le rédacteur, travail fastidieux qu'il accomplit avec franchise mais non sans bougonner. Ce n'était d'ailleurs pas la première intervention de Poincaré dans l'Affaire : en 1899, Painlevé, qui venait déposer au procès en révision à Rennes, avait lu à la barre une lettre de son collègue donnant son avis, cinglant, sur le manque de sérieux scientifique du travail de Bertillon. Cette histoire est bien connue et a été racontée, en détail, à de multiples reprises ([74], [48], [49]) et je ne m'y attarderai pas plus. Cependant, on peut se poser la question de savoir pourquoi c'est Poincaré qui avait été mis à contribution pour cette tâche. Certes, la première des raisons va de soi : en 1906, Poincaré, à 52 ans, était sans nul doute le scientifique français le plus en vue. Il avait de plus un avantage, c'est que son nom était connu d'un assez vaste public, en tout cas cultivé, qui savait qu'il avait remporté le prix du roi Oscar II de Suède en 1889, et qui avait vu la publication de livres sur l'interprétation des sciences ou différentes interventions dans les journaux, par exemple lors du Congrès international des Mathématiciens à Paris en 1900 dont Poincaré fut la figure tutélaire. Faire appel à un tel personnage pour écraser de son autorité l'insignifiant mais turbulent Bertillon était donc un calcul logique pour le gouvernement. Néanmoins, une deuxième raison, plus cachée, a sans doute joué. Le rapport pour la Cour de Cassation [1] commence par un chapitre dont le titre ne manque pas d'originalité dans les annales judiciaires : *Notions sur la probabilité des causes*, dont le contenu expose rapidement les principes de la méthode bayésienne. En effet, Bertillon avait prétendu faire reposer son système sur les méthodes et résultats de la théorie des probabilités, et lui répondre sérieusement ne pouvait se faire qu'en contredisant le soi-disant expert avec ses propres armes. Il fallait donc faire appel non seulement à une sommité, mais à quelqu'un dont l'autorité en ces matières ne pouvait faire de doute. Or, en 1906, Poincaré est aux yeux de tous le meilleur spécialiste français des mathématiques du hasard. Il n'occupe plus, certes, la chaire de Calcul des probabilités et Physique Mathématique de la Sorbonne, mais il l'avait occupée pendant une dizaine d'années (elle avait même été sa première position de professeur à Paris), y avait accompli un impressionnant investissement en Physique mathématique (nous y reviendrons longuement) et avait publié juste avant de la quitter en 1896 un cours de Calcul des Probabilités qui, en 1906, était encore pour quelque temps le livre universitaire de référence en français. Qui plus est, plusieurs de ses interventions à destination d'un large public avaient fait connaître sa vision de l'intervention des probabilités dans la Physique moderne, notamment son livre la *Science et l'Hypothèse* ([65]) . C'est donc bien en tant que spécialiste du calcul des probabilités que Poincaré fut convoqué par la justice et put aider à liquider l'Affaire.

Si l'on remonte quinze ans avant cet épisode, on ne peut manquer d'être frappé par certains contrastes. Depuis 1886, Poincaré occupait certes la Chaire de la Sorbonne dont nous parlions plus haut, mais il ne fait guère de doute qu'il n'avait alors essentiellement vu dans son intitulé que les mots *Physique mathématique*, au point de signer plusieurs publications par le descriptif : *Henri Poincaré, professeur de Physique mathématique*. En 1892, il publia l'important cours de Thermodynamique [59] qu'il avait fait à la Sorbonne quelques années auparavant. Une publication de Poincaré ne pouvait guère passer inaperçue, et un des lecteurs attentifs en fut le physicien anglais Peter Guthrie Tait (1831-1901). Tait avait été très proche de Maxwell et était un des plus vigoureux continuateurs de l'oeuvre de ce dernier. Il se fendit donc d'une recension du livre de Poincaré dans *Nature* ([79]), recension assez critique quant au fond malgré l'évident talent que Tait reconnaît à son jeune collègue français. Sur la forme, on reconnait d'ailleurs dans les arguments utilisés par Tait un trait classique des commentaires faits par les savants anglo-saxons sur les travaux de leurs homologues français - qui ne manquent pas éventuellement de leur rendre la pareille : pour le dire d'une façon lapidaire, les Anglais trouvent souvent que les Français sont trop formalistes et trop éloignés de l'expérience, voire méprisants envers elle, et les Français que les Anglais s'attachent à étudier trop systématiquement les problèmes de façon pratique sans suffisamment chercher à en trouver la structure tectonique sous-jacente. Poincaré, donc, écrit Tait, introduit dans son traité de belles et complexes théories mathématiques mais souvent au détriment du sens physique des situations qu'il étudie. Le reproche le plus appuyé du savant anglais est le fait que Poincaré ait totalement passé sous silence les théories statistiques de la thermodynamique, laissant donc dans l'ombre les travaux de son ami et maître Maxwell. Ainsi que l'écrit Tait

> 'But the most unsatisfactory part of the whole work is, it seems to us, the entire ignoration of the true (i.e. the statistical) basis of the Second Law of Thermodynamics. According to Clerk-Maxwell (Nature, xvii. 278) "The touch-stone of a treatise on Thermodynamics is what is called the Second Law." We need not quote the very clear statement which follows this, as it is probably accessible to all our readers. It certainly has not much resemblance to what will be found on the point in M. Poincaré's work : so little, indeed, that if we were to judge by these two writings alone it would appear that, with the exception of the portion treated in the recent investigations of v. Helmholtz, the science had been retrograding, certainly not advancing, for the last twenty years.'

La critique sembla toucher Poincaré qui désira y répondre et envoya à *Nature* une lettre le 24 février 1892 qui sera suivie, tout au long du premier semestre 1892, de six autres réponses croisées de Tait et de Poincaré, à dire vrai assez sèches, chacun campant sur ses positions. Le 17 mars, Poincaré fait le commentaire suivant quant au reproche majeur de Tait :

> 'J'ai laissé complètement de côté une explication mécanique du principe de Clausius que M. Tait appelle "the true (i.e. statistical) basis of the Second Law of Thermodynamics." Je n'ai pas parlé de cette explication, qui me paraît d'ailleurs assez peu satisfaisante, parce que je désirais rester complètement en dehors de toutes les hypothèses moléculaires quelque ingénieuses qu'elles puissent être ; et en particulier j'ai passé sous silence la théorie cinétique des gaz.'

On voit donc, en 1892, un Poincaré assez mal disposé *a priori* face à ce qui à l'époque constitue la principale émergence des probabilités dans la description de la matière, la Mécanique statistique. Néanmoins, Poincaré ne serait pas Poincaré si, une fois mise à jour une difficulté, il ne se décidait à prendre le taureau par les cornes et à chercher à la dominer. Une première décision fut la résolution, pour l'année académique 1893, d'enseigner la théorie cinétique des gaz à ses étudiants. Et effectivement, dans le programme de cours de la Sorbonne de cette année là, on voit que Poincaré a transformé l'intitulé en *Thermodynamique et théorie cinétique des gaz.*

En 1894, est publié le premier article de Poincaré sur la théorie cinétique des gaz [62], sur lequel nous reviendrons en détail. Si l'on y constate encore une bonne dose de scepticisme, ou en tout cas de réserve, quant à ces nouveautés aléatoires, un changement néanmoins s'annonce. D'ailleurs, cette même année académique 1893-1894, Poincaré s'est enfin décidé à professer un cours de calcul de probabilités à la Sorbonne, cours dont sortira son livre en 1896 - au moment précis où il changeait de chaire. Qui plus est, dans les années qui suivirent, les réflexions sur les mathématiques du hasard allaient apparaître plus fréquentes, jusqu'à la publication de textes à portée philosophique qui marquaient l'intégration de la théorie des probabilités dans l'outillage poincariste. En 1906, on l'a dit, le tournant est alors bien pris, d'autant que de nouveaux éléments, comme la théorie du mouvement brownien qu'Einstein vient de faire paraître, faisaient alors envisager la nécessité d'une présence encore plus radicale du hasard dans les théories scientifiques.

Le présent article concerne les aspects probabilistes de l'œuvre immense de Poincaré, aspects qui sont tout de même assez limités en volume. Une difficulté non négligeable pour aborder la question est que les probabilités ont pénétré les travaux de Poincaré comme par effraction, comme en lui forçant plusieurs fois la main, le travail essentiel de Poincaré consistant alors à construire des digues pour que le mathématicien puisse s'aventuer à pied sec sur des terrains peu stabilisés. Nous verrons d'ailleurs que son successeur Borel aura une attitude assez différente en faisant le choix résolu de l'usage de ces théories dans de nombreux domaines après avoir reçu une révélation probabiliste de façon sensiblement plus spectaculaire que Poincaré.

Mais malgré cette œuvre peu étendue, Poincaré aura réussi à laisser quelques traces significatives dont l'héritage se révèlera important. Et surtout, son influence la plus décisive aura peut être été de commencer à redorer en France le blason des probabilités qui, à la fin du 19ème siècle, se trouvaient en assez mauvaise posture dans le monde académique.

Le but de mon travail est donc triple, chacun des points correspondant, dans cet ordre, aux parties qui le subdivisent. Dans un premier temps, nous nous intéresserons à l'évolution de Poincaré dans la quinzaine d'années qui viennent d'être évoquées, pour essayer de cerner comment s'est déroulé cet apprivoisement progressif des mathématiques du hasard. Dans une deuxième partie, j'examinerai avec quelque détail certains des travaux de Poincaré où les probabilités apparaissent pour essayer de donner une idée non seulement du style de Poincaré, mais de la construction intellectuelle sur laquelle s'est articulée son évolution. Enfin, dans une dernière partie, je ferai des commentaires sur les personnes qui récupérèrent l'héritage de Poincaré en ce domaine et sur la façon dont elles le firent évoluer.

Les écrits et la vie de Poincaré ont fait couler (et feront couler encore à coup sûr) des torrents d'encre. On ne s'étonnera donc pas qu'une bonne partie du contenu de cet article ait déjà été plusieurs fois exposé dans le passé. Je me réfèrerai notamment à de nombreuses reprises au texte de Sheynin ([77]), aux travaux de von Plato ([81], [82]) ainsi qu'aux magnifiques articles publiés ou non de Bernard Bru ([20], [22]).

Remerciements

Il me faut d'abord remercier chaleureusement les organisateurs du Séminaire Poincaré du 24 novembre 2012 pour m'avoir confié ce travail, et m'avoir donné l'occasion de ne pas laisser s'achever l'année Poincaré sans m'être plongé dans les travaux de ce

dernier sur les probabilités que je ne connaissais que très superficiellement. J'espère avoir réussi dans cet article à faire passer un peu de ce que j'avais compris du cheminement intellectuel de ce grand esprit qui l'amena à évoluer considérablement sur ces sujets. Mes remerciements vont en particulier à Bertrand Duplantier qui a fait de nombreux commentaires sur une première version de cet article. Je remercie ensuite Xavier Prudent pour m'avoir aidé à lire le texte de 1894 sur la théorie cinétique des gaz ; inutile de dire que les obscurités qui restent à ce sujet dans mon travail sont entièrement miennes. Enfin, évidemment, j'ai tellement appris dans les textes de Bernard Bru qu'il me semble impossible de ne pas dire qu'il aurait été ici bien plus à sa place que moi. Je dédie cependant ce travail avec gratitude à la mémoire d'un honnête homme, Marc Barbut, qui nous manque tant depuis un froid matin de décembre 2011...

1 Première partie : découverte des probabilités

Au commencement était la chaire. Car, comme on va le voir, c'est non seulement fortuitement sur le plan scientifique que Poincaré s'est trouvé à s'intéresser aux probabilités, mais il y eut aussi d'abord une situation académique très particulière où Hermite, l'autorité mathématique majeure dans la France des années 1880 battit campagne pour placer ses trois *étoiles mathématiques* : Paul Appel (son neveu), Émile Picard (son gendre) et Henri Poincaré qu'il considèrait, bien qu'il ne lui soit pas apparenté, comme le plus brillant (au grand dam, écrivait-il à Mittag-Leffler de Madame Hermite). Or, une étonnante configuration se mit en place à la Sorbonne à ce moment là où disparurent en quelques années la plupart des détenteurs des chaires existantes de Mathématique et de Physique : Liouville et Briot meurent en 1882, Puisieux en 1883, Bouquet et Desains en 1885, Jamin en 1886, laissant le champ libre pour un renouvèlement spectaculaire des titulaires. A la fin de ce tourbillon, en cinq ans, la moyenne d'âge des professeurs de mathématiques et physique de la Sorbonne avait diminué de dix-huit ans ! Il était donc clair pour tout le monde, et pour Hermite en premier lieu, que la situation risquait de se scléroser pour longtemps et qu'il fallait agir vite et fortement en faveur de ses protégés, qui allaient effectivement être nommés tous les trois à Paris dans ces années là. Cette histoire est racontée en détail dans [2] et je n'en garderai ici que les aspects les plus importants pour notre récit.

La chaire de Physique Mathématique et Calcul des Probabilités, occupée jusqu'en 1882 par Briot avait été crée une trentaine d'années plus tôt après de multiples tentatives infructueuses de Poisson, mais sous une forme différente de celle qu'il avait espérée. L'adjonction de la Physique mathématique aux probabilités avait pour but de tempérer la mauvaise réputation dont jouissait alors la théorie des probabilités, notamment à la suite de certains travaux de Laplace et, plus spectaculairement, de Poisson lui-même concernant l'application des probabilités dans le domaine judiciaire. L'ouvrage de Poisson [72] avait mis le feu à l'académie en 1836 où Dupin et Poinsot contestèrent âprement les conclusions de Poisson et où les philosophes sous la houlette de Victor Cousin firent un esclandre *au nom des droits sacrés de la liberté contre les prétentions avancées par les mathématiciens pour calculer comment survient un événement dans le domaine moral*. Stuart Mill résuma la chose en qualifiant l'application des probabilités aux problèmes juridiques de *scandale des mathématiques*. Le calcul des probabilités sortit de cette polémique profondément terni.

Alors que Lippmann avait été nommé en 1885 sur la chaire, le décès de Jamin libèra la chaire de Recherche physique sur laquelle il se précipita, libérant par là-même la place pour Poincaré. On ne peut manquer d'être surpris à première vue par ce choix. D'abord parce que Poincaré fut préféré à d'autres candidats, sans doute moins flamboyants, mais bien plus en correspondance avec l'intitulé du poste. On l'aurait plus imaginé occuper une des chaires d'Analyse. Car, en 1882, à la mort de Briot, quand commence le grand jeu, Poincaré n'a aucuns travaux en Physique (et encore moins naturellement en Calcul des probabilités). Or, parmi les candidats écartés, il y a par exemple Boussinesq, qui a, lui, de significatives contributions dans le domaine, et qui annonce aussi son intention de remettre en état l'enseignement des probabilités qui lui semble mal en point. Non sans ironie, Boussinesq sera le successeur de Poincaré à cette même chaire quand ce dernier passera à la Mécanique céleste.

Poincaré est donc nommé en 1886, sans véritable titre pour le poste, et on pourrait donc penser que c'est véritablement le hasard des circonstances qui l'aura amené là. Cependant, comme l'analyse finement Michel Atten dans [2], des indices convergents montrent que Poincaré a véritablement désiré cette position. Dès ses cours de 1887-1888, il révèlait une connaissance très profonde des théories physiques et, en outre, certains passages de sa correspondance montraient son intérêt soutenu pour des questions de Physique. Cela indique pour le moins que son attitude n'avait pas été purement opportuniste et que cette chaire devait lui convenir. Qui plus est, Hermite, par delà la volonté de soutenir son poulain, semble avoir aussi fait un pari réfléchi en le faisant nommer à cette place un peu inattendue. Avec l'esprit acéré qu'on lui connaissait, il se pouvait bien que Poincaré fasse à cette place des travaux spectaculaires. La suite des événements, on le sait, ne donna pas complètement tort à Hermite. . . .

Le Calcul des probabilités, on l'a dit, n'a pas semblé concerner beaucoup le nouveau titulaire au début de son activité où il enchaîna les cours sur différentes théories physiques. En 1892, est publié le cours de Thermodynamique [59] qu'il avait présenté en 1888-1889, cours fortement critiqué par Tait comme on l'a expliqué dans l'introduction. Poincaré semble alors avoir été décidé à réexaminer de plus près la question de la théorie cinétique des gaz, d'autant qu'il y était incité par la lecture d'une communication de Kelvin à la Royal Society contenant plusieurs critiques de fond sur la théorie de Maxwell [43]. On peut se demander si Poincaré n'a pas été d'autant plus avide de lire ce texte qu'il pouvait lui fournir un allié de poids dans sa polémique avec Tait. Mais l'affaire prit une autre tournure, révélant la profonde honnêteté scientifique du mathématicien. Au début de l'article [62] qui paraît en 1894, tout en laissant encore percer des relents de scepticisme, Poincaré dont le conventionnalisme se met en place dans ces années là, semblait déjà à moitié convaincu d'une possible fécondité de la théorie de Maxwell.

> 'Cette théorie mérite-t-elle les efforts que les Anglais y ont consacrés ? On peut quelquefois se le demander ; je doute que, dès à présent, elle puisse rendre compte de tous les faits connus. Mais il ne s'agit pas de savoir si elle est vraie ; ce mot en ce qui concerne une théorie de ce genre n'a aucun sens . Il s'agit de savoir si sa fécondité est épuisée ou si elle peut encore aider à faire des découvertes. Or, on ne saurait oublier qu'elle a été utile à M.Crookes dans ses travaux sur la matière radiante ainsi qu'aux inventeurs de la pression osmotique. On peut donc encore se servir de

l'hypothèse cinétique, pourvu qu'on n'en soit pas dupe.' ([62], p.513)

Nous reviendrons dans la deuxième partie sur cet article de 1894 et sur la nouvelle formulation du principe ergodique où Poincaré introduisit la restriction d'états initiaux exceptionnels. Contentons nous pour l'instant de signaler le point intéressant suivant : Poincaré semble avoir été chercher cette idée dans son travail antérieur sur le Problème des trois corps pour lequel il avait obtenu en 1889 le prix du Roi de Suède. Dans le mémoire présenté pour le Prix, il avait en effet démontré un théorème de récurrence concernant l'existence de trajectoires telles que le système revienne une infinité de fois dans une région aussi petite soit-elle. Dès l'année suivante, pour la publication de son article à *Acta Mathematica*, apparaissait une version probabiliste de son théorème où Poincaré montrait comme étant de probabilité nulle l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles les trajectoires ne reviennent qu'un nombre fini de fois dans la région concernée ([58], p.71-72) ; ce passage sera inclus quelques années plus tard dans le grand traité des Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste [60] dans une section sobrement intitulée "Probabilités".

Lors de l'année académique 1893-1894, Poincaré prépare comme on l'a dit son premier cours de probabilités à destination des étudiants de Physique mathématique, publié en 1896 dans une rédaction due à Albert Quiquet, un ancien élève de l'École Normale Supérieure de la promotion 1883 devenu actuaire conseil, qui avait probablement été un auditeur attentif de la parole du maître ([63]). A l'instar des cours standard de probabilités de l'époque, il se présente non une théorie unifiée mais plutôt une série de questions auxquelles Poincaré tente de répondre (les principales, qui occupent une place prépondérante dans le volume, concernant la théorie des erreurs de mesure - nous y reviendrons dans la deuxième partie). L'édition de 1896 fait du livre un successeur en droite ligne du livre de Bertrand [9] qui était jusque là le texte habituel de référence ; sur le cours de Bertrand, on consultera [21]. Le texte de Poincaré contient cependant quelques fortes consolidations mathématiques, par rapport à celui de Bertrand, aspects qui seront encore approfondis dans la deuxième édition [70] que Poincaré bouclera quelques mois avant sa mort en 1912.

Car le mathématicien semble désormais convaincu que le calcul des probabilités n'est pas évacuable totalement du champ scientifique et il est bien décidé du coup à le rendre le plus acceptable possible pour un scientifique soucieux de sa réputation. Il décida alors de consacrer des forces non négligeables à ce but, notamment en composant plusieurs textes à mi-chemin entre vulgarisation (au sens de rédiger et décrire certains concepts en utilisant le langage le moins technique et spécialisé possible) et innovation. Deux surtout sont importants : celui de 1899 ([64]) - repris comme chapitre de [65] - et celui de 1907 ([68]) - repris lui aussi dans [69] puis comme Préface à la deuxième édition de son cours [70] - textes qui marqueront la volonté de Poincaré d'afficher son nouveau credo probabiliste. Mais Poincaré, il faut le concevoir, veut d'abord se convaincre lui-même ce qui amène régulièrement à se poser la question que Jean-Paul Pier a mis ironiquement en titre de son article [57] : croyait-il ou non au calcul des probabilités ? Sans prétendre apporter une réponse définitive, on peut en tout cas constater que Poincaré a, très honnêtement, cherché à baliser la zone où il lui semblait que l'utilisation des probabilités ne posait pas de problème majeur. D'où la tentative de répondre à certaines questions fondamentales pour dépasser les défauts que Bertrand avait ironiquement illustrés à l'aide de paradoxes : Où est il légitime de faire intervenir le hasard ? Quelle définition donner de la probabilité ? Quelles techniques mathématiques développer afin d'obtenir des outils utilisables pour la Physique, et notamment pour la Théorie cinétique des gaz. Borel, on le verra dans la troisième partie, saura par la suite se souvenir de la posture poincariste.

Dans son texte de 1907, Poincaré s'est bien appliqué à préciser la manière dont selon lui l'appel à la notion de hasard est légitime. Il en voit essentiellement trois origines : l'ignorance d'une cause très petite que nous ne pouvons pas connaître mais qui produit un effet très grand (l'effet papillon de la météorologie), la complexité des causes qui nous interdit d'accéder à un ordre autre que statistique (comme dans la théorie cinétique des gaz), l'intervention d'une cause imprévue que nous avons négligée. Comme on le voit, la conception laplacienne est encore assez proche, ce qui ne saurait nous étonner outre mesure car Poincaré, né en 1854, est un enfant d'un siècle dont Laplace est une figure tutélaire. Néanmoins, Poincaré sait évidemment combien les griefs se sont accumulés contre la théorie de Laplace et il propose différentes excursions pour l'aménager : le hasard, s'il est lié dans une certaine mesure à notre ignorance, n'est pas que cela et il est important de préciser la nature de ce lien. La posture conventionnaliste dont nous avons déjà parlé lui facilite bien sûr la vie, mais Poincaré ne cherche pas la facilité. Comme il l'écrivait en 1899

> 'Comment saurons nous que deux cas possibles sont également probables ? Sera-ce par une convention ? Si nous plaçons au début de chaque problème une convention explicite, tout ira bien ; nous n'aurons plus qy'à appliquer les règles de l'arithmétique et de l'algèbre et nous irons jusqu'au bout du calcul sans que notre résultat puisse laisser place au doute. Mais, si nous voulons en faire la moindre application, il faudra démontrer que notre convention était légitime, et nous nous retrouverons en face de la difficulté que nous avions cru éluder.'([64], p.262)

Dans un bel élan créatif, Poincaré dégagea une conception permettant d'objectiver la détermination de certaines probabilités. Par exemple, si l'on considère une roulette de casino avec une alternance de secteurs rouges et noirs, même si l'on n'a aucune idée de la façon dont elle est mise en mouvement, on peut montrer qu'il est raisonnable de supposer qu'après un grand nombre de tours, la probabilité que la bille tombe dans une zone rouge (ou une zone noire) est égale à 1/2. Il est donc des situations où l'on peut ne pas se contenter du brumeux principe laplacien de raison (in)suffisante comme convention pour fixer la probabilité. La très profonde *méthode des fonctions arbitraires*, qui part de l'hypothèse qu'au temps initial la distribution de probabilité représentant l'arrêt de la bille est quelconque et montre que cette distribution s'équilibre asymptotiquement et tend vers la loi uniforme, est sans doute la plus importante des inventions de Poincaré dans le domaine des probabilités et nous verrons dans la suite la spectaculaire descendance qu'elle rencontra.

Pour conclure ce survol, on voit donc qu'en 1906, au moment de l'épisode du procès en Cassation de l'Affaire Dreyfus, si Poincaré est affiché comme l'autorité française en théorie des probabilités, il est, quant à sa conception scientifique, un peu au milieu du gué où il restera jusqu'à la fin de sa vie. Il est d'ailleurs notable qu'au moment précis où Borel allait prendre en quelque sorte la relève -et de quelle façon ! - Poincaré ne semblait pas avoir particulièrement regardé l'entreprise de son jeune successeur. Pas plus d'ailleurs qu'il ne s'était semble-t-il intéressé aux expériences heureuses du malheureux Bachelier : il avait, c'est vrai, rédigé un rapport bienveillant sur la thèse [3] de celui-ci, et lui avait ponctuellement apporté son aide, mais il n'y eut pas de trace ensuite du moindre contact scientifique entre les deux mathématiciens [27]. Plus surprenant encore, Poincaré sembla ignorer totalement les travaux de l'école russe (Chebyshev, Markov, Lyapounov...) ce qui explique qu'il n'eut jamais conscience de certains rapprochements. L'œuvre probabiliste de Poincaré laisse donc un sentiment d'inachevé, du en partie sans doute à sa mort prématurée à 58 ans, mais aussi à la singulière situation de ce dernier géant de la science newtono-laplacienne qui demeura sur le seuil des bouleversements qui allaient lui succéder.

2 Deuxième partie : construction d'une approche probabiliste

Je voudrais dans cette deuxième partie essayer de présenter quelques étapes qui ont jalonné l'entrée progressive des questions de probabilités dans les travaux de Poincaré. Même si l'on ne peut pas voir à proprement parler une continuité parfaite dans l'enchaînement de ces recherches, une certaine généalogie se dégage de l'ensemble qui permet de mieux comprendre comment le mathématicien a petit à petit adopté un point de vue probabiliste. J'ai essayé autant que possible que chacune des sous-sections de cette partie soit lisible de façon autonome, ce qui a pu nécessiter quelques très brèves redites.

2.1 Le théorème de récurrence et son prolongement "probabiliste"

En prévision du soixantième anniversaire du roi Oscar II de Suède en 1889, un concours mathématique fut organisé par Mittag-Leffler portant notamment sur le problème des trois corps : le système Terre-Lune-Soleil est-il stable ? Périodique ? Organisé pour rester dans une zone finie de l'espace ? Autant de questions fondamentales qui étaient des défis à la mécanique newtonienne depuis le 18ème siècle. Poincaré soumit en 1888 un impressionnant mémoire, immédiatement couronné par un jury qui comprenait Weierstrass, Mittag-Leffler et Hermite. Lors de la correction des épreuves de l'article pour *Acta Mathematica*, Phragmen repéra une erreur, qui amena Poincaré à de nombreux amendements avant de resoumettre l'année suivante un énorme article qui fut publié dans le volume de 13 des *Acta Mathematica*.

Cette histoire, bien connue et documentée (voir notamment [7]), ne nous intéresse que dans la mesure où une différence entre la version soumise pour le prix et la version publiée en 1890 fait apparaître le mot *probabilité*, sans doute pour la première fois dans l'oeuvre du mathématicien français. Je suivrai de près le beau travail d'enquête de Bernard Bru [22] sur la façon dont les raisonnements dénombrables se sont progressivement imposés dans les mathématiques de l'aléatoire.

Dans la première partie du mémoire proposé au concours, Poincaré avait étudié les implications de l'existence d'invariants intégraux sur le comportement des systèmes dynamiques. Il considérait notamment le cas d'un fluide incompressible pour lequel la figure dessinée par l'ensemble des molécules changera de forme, mais où le volume des molécules qui le composent reste constant dans le temps.

Poincaré avait alors énoncé une première version du théorème de récurrence sous la forme suivante : soit donnée une portion E bornée de l'espace composée de points mobiles se déplaçant suivant les équations de la mécanique, de telle sorte que le volume total reste invariant dans le temps. Supposons dit Poincaré que les points mobiles restent dans E. Alors si l'on considère r_0 une région de l'ensemble E, aussi petite soit-elle, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

La démonstration de Poincaré est un modèle d'ingéniosité et de simplicité. On discrétise le temps avec un pas d'amplitude τ. Appelons avec Poincaré

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

les conséquentes de r_0 c'est à dire les positions successives des différents points de la région r_0 aux temps

$$\tau, 2\tau, \ldots, n\tau, \ldots$$

De la même façon, l'antécédente d'une région est celle dont elle est immédiatement la conséquente. Toutes les régions r_i ayant même volume, comme elles restent toutes par hypothèse à l'intérieur d'une zone finie, il y en a qui s'intersectent nécessairement. Soient deux de ces régions r_p et r_q avec $p < q$, qui s'intersectent en une région s_1 de volume non nul : un point qui part de s_1 se retrouve dans s_1 au temps $(q-p)\tau$. On remonte alors le temps en appelant r_0^1 la sous-région de r_0 dont s_1 est la p-ième conséquente. Un point mobile partant de r_0^1 traversera de nouveau cette région au temps $(q-p)\tau$. On recommence alors le raisonnement en remplaçant r_0 par r_0^1. On construit ainsi une suite emboîtée (r_0^n) de sous-régions de r_0, tout point partant de r_0^n y revenant n fois au moins. Prenant un point de l'intersection des r_0^n (Poincaré en assume implicitement la non vacuité), une trajectoire partant d'un tel point repassera une infinité de fois dans r_0.

Sous cette forme, comme on le voit, le théorème est donc parfaitement déterministe. Quelle mouche a alors piqué Poincaré pour que, dans la nouvelle version publiée en 1890, il ait trouvé le besoin de préciser son résultat sous la forme d'un énoncé probabiliste ([58], pp.71-72) ? En effet, à première vue, l'apparition du mot probabilité sur ces deux pages peut surprendre dans le cadre de la mécanique de Newton, Laplace et Hamilton que Poincaré donne à ton traité. En fait, comme le signale Bru ([22]), il ne faut pas se méprendre et voir dans l'usage que Poincaré fait de la probabilité la soudaine révélation de la présence d'un hasard au sens ontique où nous l'entendrions spontanément aujourd'hui. Poincaré énonce lui même : *je me propose maintenant d'expliquer pourquoi [les trajectoires non récurrentes] peuvent être regardées comme exceptionnelles.* Ce que cherche donc Poincaré c'est un moyen commode d'exprimer la rareté, la minceur d'un ensemble. On est encore à ce moment là avant l'intervention décisive des outils de la théorie de la mesure et notamment de la thèse de Borel qui, quatre ans plus tard, aura besoin de montrer qu'un ensemble dénombrable est de mesure nulle. Depuis longtemps les astronomes notamment ont l'habitude de faire usage du concept de probabilité en ce sens de rareté pratique et sans doute ne faut il pas chercher plus loin pour expliquer l'apparition du mot sous la plume de Poincaré. C'est une façon de parler commode, qui n'a pas vraiment d'autre but que de recouvrir l'*instinct obscur* dont parle Poincaré dans son article de 1899 ([64], p.262), comme en s'excusant, parce que nous ne pouvons nous en passer si l'on veut faire de la science.

Poincaré commence par poser la "définition" suivante : si l'on appelle p_0 la probabilité que le point mobile considéré parte d'une région r_0 de volume v_0 et p_0' celle qu'il parte d'une autre région r_0' de volume v_0', alors

$$\frac{p_0}{p_0'} = \frac{v_0}{v_0'}.$$

En particulier, si r_0 est une région, de volume v, qui sert de référence, la probabilité que le point mobile partant de r_0 parte d'une sous-région σ_0 de volume w est donnée par $\frac{w}{v}$. Armé de cette notion, le mathématicien veut établir que les conditions initiales dans r_0 telles que la trajectoire ne traverse pas r_0 plus de k fois forment un ensemble de probabilité nulle, ceci aussi grand puisse être l'entier k.

Plus haut dans son article, Poincaré avait démontré que si $r_0, \ldots, r_{n-1}$ étaient n régions de même volume v incluses dans une même région de volume V, et qu'on avait $nv > kV$, alors nécessairement il y avait $k+1$ régions dont l'intersection était non vide. En effet, si l'on suppose que toutes les intersections $k+1$ par $k+1$ sont disjointes, on peut écrire (avec des notations modernisées) que $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{r_i} \leq k$ d'où $nv \leq kV$ en intégrant sur le volume V.

Supposons toujours valide l'hypothèse du théorème précédent, à savoir que le point mobile reste à distance finie, dans une portion de l'espace de volume V, et reprenons le pas τ de discrétisation du temps. Choisissons alors n assez grand pour que $n > \frac{kV}{v}$. On peut alors trouver, parmi les n conséquentes successives d'une région r_0 de volume v, $k+1$ d'entre elles que nous notons

$$r_{\alpha_0}, r_{\alpha_1}, \ldots, r_{\alpha_k}$$

avec $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$, qui s'intersectent en une partie s_{α_k}. Notons ensuite s_0 l'antécédente d'ordre α_k de s_{α_k} et s_p la p-ième conséquente de s_0. Si un point mobile part de s_0, il traversera les régions

$$s_0, s_{\alpha_k-\alpha_{k-1}}, s_{\alpha_k-\alpha_{k-2}}, \ldots, s_{\alpha_k-\alpha_2}, s_{\alpha_k-\alpha_1}, s_{\alpha_k-\alpha_0}$$

qui, par construction sont toutes incluses dans r_0 (puisque pour tout $0 \leq i \leq k$, le α_i-ème conséquent de $s_{\alpha_k-\alpha_i}$ se trouve dans s_{α_k} et donc dans r_{α_i}) . On a donc montré qu'il y a dans la région r_0 considérée des conditions initiales de trajectoires qui repassent au moins $k+1$ fois par r_0.

Fixons enfin une région r_0 de volume v. Soit alors, dit Poincaré, σ_0 la partie de r_0 telle que les trajectoires issues de σ_0 ne traversent pas r_0 au moins $k+1$ fois entre le temps 0 et le temps $(n-1)\tau$; notons w le volume de σ_0. La probabilité p_k des trajectoires issues de r_0 ne traversant pas plus de $k+1$ fois r_0 entre le temps 0 et le temps $(n-1)\tau$ est donc $\frac{w}{v}$.

Par hypothèse une trajectoire issue de σ_0 ne traverse pas $k+1$ fois r_0, et donc a fortiori pas $k+1$ fois σ_0. On a donc nécessairement, d'après le résultat précédent, $nw < kV$ et donc

$$p_k < \frac{kV}{nv}.$$

Aussi grand que soit k, on peut choisir n grand de telle sorte que cette probabilité soit aussi petite qu'on veut. Poincaré, usant de façon tacite de la continuité de la probabilité le long d'une suite décroissante d'événements, conclut que la probabilité est nulle pour qu'une trajectoire partant de r_0 ne le retraverse pas plus de k fois entre les temps 0 et ∞.

2.2 Théorie cinétique des gaz

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, Poincaré en 1892 ne semble pas bien disposé envers les descriptions statistiques de la Thermodynamique. Sa polémique avec Tait dont j'ai cité quelques passages est naturellement à relier à l'esprit mécaniste dans lequel Poincaré avait été formé. La mécanique statistique, et en particulier la théorie cinétique des gaz, ne pouvait de ce fait prétendre être plus qu'une ingénieuse construction sans valeur explicative. Un texte révélateur de la pensée de Poincaré sur ces questions est publié juste après, en 1893, dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* dont c'est l'année inaugurale [61]. Avec beaucoup d'honnêteté, Poincaré y fait côtoyer la conception mécaniste de l'univers classique depuis Newton et Laplace et les nombreux problèmes auxquels elle se heurte, quand l'expérience révèle de multiples situations pratiques d'irreversibilité, comme c'est le cas dans l'agitation moléculaire de la thermodynamique. Poincaré mentionne que la théorie cinétique des gaz proposée par les Anglais est la tentative *la plus sérieuse de conciliation entre le mécanisme et l'expérience* ([61], p.536). Néanmoins, il affirme que de nombreuses difficultés restent encore, par exemple pour concilier la récurrence des systèmes mécaniques (*un théorème facile à établir* (sic) indique l'auteur qui joue peut être l'auto-dérision ?) et l'observation expérimentale de la convergence vers un état stable. La manière dont la théorie cinétique des gaz se tire d'affaire en invoquant le fait que ce qu'on repère comme un état d'équilibre stable n'est en fait qu'un état transitoire mais restant dans le même état un temps énorme ne semble pas convaincre notre héros. Mais, pour le moins, la tonalité adoptée dans [61] est sensiblement plus calme que dans les échanges avec Tait. Un autre point qu'on peut remarquer, c'est que là comme dans tous les travaux dont nous allons parler, Boltzmann est le grand absent, jamais mentionné par Poincaré. Cette absence, qu'il est difficile de ne pas penser volontaire, reste inexpliquée, y compris pour Von Plato dans [81], p.84.

En 1892, Kelvin avait fait lire à la Royal Society (qu'il présidait alors) une note [43] dont le titre était sans ambiguité : il parlait d'exemple *ad hoc* prouvant de façon *décisive* la fausseté de la répartition de l'énergie cinétique suivant Maxwell et Boltzmann. Les deux physiciens avaient en effet énoncé comme principe de base à leurs théories le théorème d'équipartition de l'énergie cinétique : les énergies cinétiques moyennes de différentes parties indépendantes d'un système se trouvent dans le même rapport que les degrés de libertés dont jouissent ces parties. Ce résultat était fondamental pour établir une relation entre énergie cinétique et température.

Dans ce court travail, Kelvin imagine un système mécanique comprenant trois points A, B, C en mouvement dans cet ordre sur un segment de droite KL, de telle sorte que B reste quasiment immobile et se contente de réagir aux chocs de A et C de part et d'autre, cependant que la situation mécanique des deux côtés est différente en raison d'une force répulsive F agissant sur A et le repoussant vers B (dans la zone KH du schéma) alors que C se déplace librement.

L'énergie totale de C s'équilibre alors avec celle de A, mais comme cette dernière inclut une part positive d'énergie potentielle due à la force répulsive, Kelvin conclut triomphalement que l'énergie cinétique moyenne de A et de C ne peuvent être égales, comme elles devraient l'être d'après la théorie de Maxwell puisque les deux points ont chacun un degré de liberté. Kelvin commente

> 'It is in truth only for an approximately "perfect" gas, that is to say, an assemblage of molecules in which each molecule moves for comparatively long times in lines very approximately straight, and experiences changes of velocity and direction in comparatively very short times of collision, and it is only for the kinetic energy of the translatory motions of the molecules

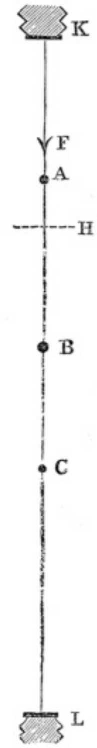

Fig. 1 – Dispositif de Kelvin dans [43].

> of the "perfect gas" that the temperature is equal to the average kinetic energy per molecule' ([43], p.399)

La lecture de cette note incite Poincaré, comme il le dit lui-même, à réfléchir sur la théorie cinétique des gaz, à comprendre si l'objection de Kelvin lui semble recevable et à tirer lui même ses propres conclusions sur le sujet. On peut penser qu'au moment où il vient d'être pris à parti par Tait, le titre de la note d'une autorité comme Kelvin lui avait sauté aux yeux et qu'il avait pu penser y trouver quelque argument décisif pour confirmer son scepticisme. C'est ainsi qu'en 1894 est publié le premier article de Poincaré sur la théorie cinétique des gaz [62]. Poincaré commence par y faire un long exposé général aboutissant aux fondements cruciaux de la théorie par Maxwell. Cet exposé lui semble nécessaire avant toute chose car la théorie cinétique des gaz *a été beaucoup moins cultivée par les physiciens français que par les anglais* ([62], p.513). Les points cruciaux sont d'abord le principe ergodique, que Poincaré nomme *postulat de Maxwell*, stipulant que, quelle que soit la situation initiale du système, il passera toujours une infinité de fois aussi près que l'on voudra d'une quelconque des situations compatibles avec les intégrales du mouvement ; de ce résultat, Maxwell tire un théorème dont la conséquence la plus fondamentale est le point que contestait Kelvin : pour un système dont la seule intégrale est la conservation de l'énergie cinétique, s'il est décomposé en deux parties indépendantes, les valeurs moyennes de ces deux parties sur le temps long seront dans le même rapport que leurs degrés de liberté.

Poincaré commence par remarquer, comme il l'avait déjà fait dans [61], que le théorème de récurrence de [58] contredit le postulat de Maxwell le long des solutions récurrentes. Il est donc pour le moins nécessaire d'ajouter que le postulat est vrai *sauf pour certaines conditions initiales exceptionnelles* ([62], p.518). Comme le commente Von Plato [81] (p.84) il s'agit donc de la formulation classiquement retenue aujourd'hui pour le principe ergodique, pour tenir compte des situations initiales exceptionnelles. Encore une fois, alors que cette idée est présente chez Boltzmann, le savant autrichien n'est mentionné nulle part.

Mais c'est surtout l'objection contenue dans l'article de Kelvin que Poincaré veut tenter d'analyser en détail pour voir si elle contredit ou non les résultats de Maxwell. Il construit à partir de la situation du système A, C un modèle géométrique représentatif : un point M dans un espace de phase à trois dimensions dont la première coordonnée est la vitesse de A, la deuxième celle de C et la troisième l'abscisse de A. A l'aide des conditions du système de Kelvin, Poincaré définit alors un solide S de révolution dont M ne peut pas sortir au cours du temps. Naturellement, deux petits volumes de même dimension dans S peuvent être traversés un nombre de fois différent suivant la vitesse de traversée, alors que le temps total de séjour pourrait être le même. Poincaré introduit alors la notion de *densité de la trajectoire* dans un petit élément dans S de volume v par le quotient $\frac{t}{v}$ où t le temps total passé par une trajectoire dans v ([62], p.519). Grâce à cette représentation, Poincaré peut alors définir la valeur moyenne de l'énergie cinétique de A comme le moment d'inertie de S par rapport au plan yz, celle de C comme le moment d'inertie par rapport à xz, les "masses" dans S étant réparties par la densité précédemment définie. Le solide S étant de révolution ces moments d'inertie sont égaux : l'analyse fine menée par Poincaré montre donc qu'on peut retrouver le résultat d'équipartition en concevant la moyenne des énergies cinétiques non pas de façon uniforme sur le temps mais en tenant compte des phases du mouvement et de leur durée.

Poincaré conclut son article par un commentaire qui peut sembler paradoxal au vu de ce qu'il vient d'obtenir comme résultat. Tout en contestant le caractère décisif des arguments de Kelvin, Poincaré tient à souligner qu'il partage quand même son scepticisme ; pour appuyer son affirmation, il transforme légèrement l'exemple de Kelvin de façon à produire un cas posant *véritablement* problème. En fait, c'est quelques lignes plus tôt que Poincaré a souligné ce qui était pour lui le point fondamental :

> 'Je crois que le théorème de Maxwell est bien une conséquence nécessaire de son postulat, du moment qu'on admet l'existence d'un état moyen ; mais le postulat lui-même doit comporter de nombreuses exceptions.' ([62], p.521)

C'est donc selon Poincaré la bonne définition des états moyens qui peut poser question, et c'est sur la recherche de cette définition que les efforts de ceux cherchant à consolider les bases de la mécanique statistique doivent porter en premier lieu. Nous allons voir par la suite que c'est en effet dans cette direction là que Poincaré puis Borel allaient se concentrer.

2.3 Théorèmes limites

Le cours [63] publié en 1896 constitue la première publication de Poincaré traitant explicitement de la théorie des probabilités. Il s'agit comme on l'a déjà dit de la transcription du cours prononcé par Poincaré pendant l'année académique 1893-94 à la Sorbonne, rédigé par un ancien élève de l'École Normale Supérieure, devenu actuaire, qui avait sans doute désiré s'instruire auprès du maître, et publié aux éditions Georges Carré. Cette première édition ne comporte pas de préface, et se présente comme une succession de 22 leçons, s'enchaînant plus ou moins les unes aux autres, reflet sans doute raisonnablement fidèle de l'enseignement oral de Poincaré. Elle comprend 274 pages, là où la deuxième de 1912 [70] en comportera 341 ce qui donne une idée des compléments non négligeables que Poincaré apportera. Sous sa forme initiale, le livre de Poincaré apparaît comme un successeur du traité de Bertrand [9] dont il reprend la trame. Néanmoins, l'esprit du cours est très différent et nous devons nous y arrêter un instant. Comme, cependant, ce cours a été étudié en détail dans plusieurs articles, et notamment dans [77] et [23], je me contenterai d'un certain nombre de remarques. Observons néanmoins que les auteurs mentionnés se sont concentrés sur la deuxième édition de 1912 [70], qui bénéficie naturellement de réflexions de Poincaré postérieures à ce temps très particulier de sa découverte des mathématiques de l'aléatoire, ce qui peut donner parfois une impression un peu anachronique de l'état de pensée du mathématicien en 1896. J'ai fait ici le choix, au contraire, de m'attacher essentiellement à commenter la version originale de 1896.

Une partie essentielle du cours de Poincaré est consacrée à l'intervention de la théorie des probabilités pour modéliser les erreurs de mesure dans les sciences expérimentales. Dans les commentaires sur ses propres travaux ([71], p.121), Poincaré écrit d'ailleurs

> 'La Chaire de Physique Mathématique a pour titre officiel : Calcul des Probabilités et Physique Mathématique. Ce rattachement peut se justifier par les applications que peut avoir ce calcul dans toutes les expériences de Physique ; ou par celles qu'il a trouvées dans la théorie cinétique des gaz. Quoi qu'il en soit, je me suis occupé des probabilités pendant un semestre et mes leçons ont été publiées. La théorie des erreurs était naturellement mon principal but. J'ai dû faire d'expresses réserves sur la généralité de la "loi des erreurs" ; mais j'ai cherché à la justifier, dans les cas où elle reste légitime, par des considérations nouvelles.'

Dans [63], l'analyse de la loi des erreurs commence à la page 147 et va occuper l'essentiel des chapitres suivants. Poincaré fait quelques commentaires sur la façon dont on a dégagé jusque là le caractère gaussien de l'erreur

> [Cette loi] 'ne s'obtient pas par des déductions rigoureuses ; plus d'une démonstration qu'on a voulu en donner est grossière, entre autres celle qui s'appuie sur l'affirmation que la probabilité des écarts est proportionnelle aux écarts. Tout le monde y croit cependant, me disait un jour M.Lippmann, car les expérimentateurs s'imaginent que c'est un théorème de mathématiques, et les mathématiciens que c'est un fait expérimental.' ([63], p.149)

Considérons des observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La vraie valeur du phénomène étant notée z, la probabilité *a priori* que chacune de ces n observations appartienne à l'intervalle $[x_i, x_i + dx_i]$ est prise sous la forme

$$\varphi(x_1, z)\varphi(x_2, z)\ldots\varphi(x_n, z).$$

Soit enfin $\psi(z)dz$ la probabilité *a priori* pour que la véritable valeur du phénomène se trouve dans l'intervalle $[z, z + dz]$.

En supposant que ψ était constante et que $\varphi(x_i, z)$ s'écrivait sous la forme $\varphi(z-x_i)$, Gauss avait obtenu la loi gaussienne en cherchant φ pour que la valeur la plus probable soit la moyenne empirique

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Poincaré rappelle ([63], p.152) les objections de Bertrand au résultat de Gauss ; Bertrand avait notamment contesté l'exigence que la moyenne soit la valeur la plus probable alors que la condition naturelle serait de demander qu'elle soit la valeur probable (c'est-à-dire l'espérance).

Poincaré examine alors la possibilité de lever les conditions de Gauss, tout en gardant dans un premier temps la condition que la moyenne empirique soit la valeur la plus probable ([63], p.155 - voir en outre plus de détails dans [77], p.149 *et seq.*). Il obtient alors comme forme de la fonction d'erreur

$$\varphi(x_1, z) = \theta(x_1)e^{A(z)x_1 + B(z)}$$

où θ et A sont deux fonctions arbitraires et où l'équation différentielle $A'(z)z + B'(z) = 0$ est satisfaite.

Reprenant l'objection de Bertrand, Poincaré examine ensuite le problème obtenu en remplaçant l'exigence *valeur la plus probable* par *valeur probable*.

Il énonce à cet endroit ([63], p.158) un théorème qui lui servira plusieurs fois par la suite : si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues, le quotient

$$\frac{\int \varphi_1(z)\Phi^p(z)dz}{\int \varphi_2(z)\Phi^p(z)dz}$$

tend quand $p \to +\infty$ vers

$$\frac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2(z_0)},$$

où z_0 est un point où Φ atteint son unique maximum. Comme à son habitude, qui faisait s'arracher les cheveux à Mittag-Leffler, la rédaction de Poincaré est quelque peu laconique : il ne donne ni véritables hypothèses, ni véritable démonstration, présentant juste le résultat comme une extrapolation du cas discret.

Quoi qu'il en soit, considérant alors

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; z) = \varphi(x_1, z)\varphi(x_2, z) \ldots \varphi(x_n, z),$$

Poincaré se place sous l'hypothèse que p observations ont donné la valeur x_1, p ont donné la valeur x_2, …, p ont donné la valeur x_n, où p est un entier fixé et très grand ([63], p.157)

La condition demandée sur la moyenne d'être égale à l'espérance s'écrit donc

$$\frac{\int_{+\infty}^{+\infty} z\psi(z)\Phi^p(x_1, \ldots, x_n; z)dz}{\int_{+\infty}^{+\infty} \psi(z)\Phi^p(x_1, \ldots, x_n; z)dz} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

En appliquant le théorème précédent, on a ici comme limite z_0 qui doit donc être égal à la moyenne arithmétique $\overline{x}$. On est donc ramené à la question précédente sous l'hypothèse que Φ doit être maximale en $\overline{x}$. Sous l'hypothèse que φ ne dépende que des écarts $z - x_i$ Poincaré réobtient la gaussienne. Il est intéressant de remarquer que la forme de la probabilité *a priori* du phénomène, ψ n'intervient pas dans le résultat.

Cette disparition de l'hypothèse initiale pourrait avoir inspiré le mathématicien pour sa méthode des fonctions arbitraires dont nous parlerons plus loin.

Poincaré examine ensuite le problème général en levant de nouveau cette contrainte, et obtient la forme suivante pour φ

$$\varphi(x_1, z) = \theta(x_1)e^{-\int \psi(z)(z-x_1)dz},$$

où $\int \psi(z)(z-x_1)dz$ est la primitive de $\psi(z)(z-x_1)$ égale à 0 in x_1.

Poincaré fait alors le commentaire ([63], p.165) que la seule hypothèse raisonnable est de prendre $\psi = 1$ car il n'y a pas de raison que la fonction φ qui dépend de l'habileté de l'observateur dépende de ψ qui est la probabilité *a priori* pour la valeur de la quantité mesurée. Pour θ par contre, il n'y a pas vraiment de bonne raison de le supposer constant (cas qui amènerait de nouveau la gaussienne). Poincaré prend l'exemple des observations méridiennes en astronomie où l'on a constaté en pratique une *erreur décimale* où les observateurs montrent des prédilections pour certaines des décimales d'approximation préférées.

Poincaré donne alors une justification un peu alambiquée du choix de la moyenne parce qu'elle satisfait un aspect pratique : comme les erreurs sont petites, estimer $f(z)$ par la moyenne des $f(x_i)$ revient au même que d'estimer z par la moyenne des x_i, ce qu'on voit immédiatement en remplaçant $f(x)$ par son développement limité en z,

$$f(z) + (x-z)f'(z).$$

Mais la justification la plus forte est donnée dans la leçon suivante (Quatorzième leçon, [63], p.167) qui étudie la consistance de l'estimateur $\overline{x}$ avec n'importe quelle loi d'erreur en se fondant sur la loi des grands nombres. Après avoir rappelé le calcul des moments de la loi gaussiennne, Poincaré met en œuvre une méthode des moments sous la forme suivante. Supposons que y, de loi φ admette les mêmes moments que ceux d'une loi gaussienne. On calcule alors la valeur probable de $e^{-n(y_0-y)^2}$. Décomposant

$$e^{-n(y_0-y)^2} = \sum_{p=0}^{\infty} A_p y^{2p},$$

on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{h/\pi} e^{-hy^2} e^{-n(y_0-y)^2} dy = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \, \mathbb{E}(y^{2p}),$$

en notant $\mathbb{E}(y^{2p})$ l'espérance de y^{2p} (les moments impairs sont naturellement nuls) et où h est une constante strictement positive donnée. La même décomposition est valable par hypothèse si φ remplace dans l'intégrale la loi gaussienne. On a donc

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{h/\pi} e^{-hy^2} e^{-n(y_0-y)^2} dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-n(y_0-y)^2} dy} = 1,$$

et en utilisant le résultat limite énoncé plus haut, on obtient, quand n tend vers l'infini,

$$\sqrt{h/\pi} e^{-hy_0^2} = \varphi(y_0).$$

On considère de nouveau avoir effectué n mesures

$$x_1, \ldots, x_n$$

d'une quantité z et on appelle $y_i = z - x_i$ l'erreur individuelle sur la i-ème mesure. Supposons que la loi d'une erreur individuelle soit quelconque.

Poincaré commence par justifier le fait de considérer comme erreur la moyenne

$$\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$$

des n erreurs individuelles. En effet, explique-t-il, la moyenne devient de plus en plus probable puisque la valeur probable de son carré est

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(y_1^2),$$

et donc, quand n devient grand, la valeur probable de

$$\left(\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}\right)^2$$

tend vers 0 au sens où

$$\mathbb{E}[(z - \overline{x})^2]$$

tend vers 0 (c'est la loi faible des grands nombres). Comme le fait remarquer Sheynin ([77], p.151), Poincaré se trompe en attribuant à Gauss cette remarque car Gauss ne s'est en fait jamais intéressé à l'étude asymptotique de l'erreur.

Cela étant, Poincaré utilise sa méthode des moments pour montrer que la loi de la moyenne est gaussienne quand les erreurs individuelles sont centrées et n'ont pas d'effet significatif sur elle.

Dans la deuxième édition de 1912 [70], de façon tout à fait significative, Poincaré rajoute à cet endroit une section ([70], n°144 p.206 à 208) pour démontrer le théorème central de la limite, et obtenir une *justification a posteriori de la loi de Gauss fondée sur le théorème de Bernoulli*. Poincaré introduit la fonction caractéristique comme

$$f(\alpha) = \sum_x p_x e^{\alpha x}$$

dans le cas discret *fini* et

$$f(\alpha) = \int \varphi(x) e^{\alpha x} dx$$

dans le cas à densité. Dans son esprit, α est un réel ou un complexe mais ni les bornes de la somme ou de l'intégrale ni les questions de convergence ne sont mentionnées. Grâce à la formule d'inversion de Fourier, Poincaré affirme que la fonction caractéristique détermine la loi. Il peut ainsi obtenir simplement qu'une somme de gaussiennes indépendantes suit une loi gaussienne, et, avec une écriture heuristique plutôt laconique, que l'erreur *résultante d'un très grand nombre d'erreurs partielles très petites et indépendantes* ([70], p.208) est gaussienne. Il est difficile d'accorder à ces quelques lignes le statut de démonstration du théorème central pour lequel il faudra attendre, comme on le sait, une décennie avec les travaux de Lindeberg et Lévy ([47], [46]). En outre, Poincaré montre sans doute dans ce rajout intéressant, mais trop hâtif, sa complète ignorance des travaux de l'école russe (Tchebitcheff, Markov et Lyapunov) qui à l'époque a déjà obtenu des versions bien balisées du théorème.

Dans la Seizième leçon de [63], (reprise comme n°147 de la deuxième édition [70] p.211), Poincaré le physicien, reste réservé sur un usage sans discernement des théories qu'il vient de décrire qui reposent trop sur une idéalisation mathématique (absence d'erreur systématique, hypothèses trop lisses...). Il écrit, non sans ironie : *j'ai plaidé de mon mieux jusqu'ici en faveur de la loi de Gauss*. Il se livre alors à une étude des cas d'exception et complète son texte par un examen en détail de la méthode des moindres carrés : je renvoie sur ces sujets à l'article de Sheynin ([77]) déjà abondamment cité.

2.4 La grande invention : méthode des fonctions arbitraires

Bien qu'il soit considéré, à juste titre, comme le père du conventionnalisme en sciences, il serait réducteur de penser que cette attitude couvre l'ensemble de la philosophie de recherche de Poincaré. Certes, depuis le début, ce dernier avait répété que toute utlilisation des probabilités doit avoir à son origine le choix d'une convention qu'il faudrait justifier. Ainsi, si l'on jette un dé, on sera en général amené à prendre comme convention d'attribuer à chacune des faces la probabilité 1/6 d'apparaître. Mais tous les arguments pour la justifier ne sauraient avoir la même valeur, et bien choisir relève aussi d'une vraie démarche scientifique. Le bon sens en effet ne saurait nous contenter : Bertrand s'était amusé, dans la construction de ses fameux paradoxes sur le choix d'une corde dans un cercle, à montrer que le résultat dépendait si fortement de la convention choisie qu'il était simplement dénué de toute signification et le calcul se réduisait à une arithmétique plus ou moins ingénieuse. On risquait alors de condamner tout le calcul des probabilités comme étant une science vaine et de conclure que notre *instinct obscur* nous avait trompé ([64], p.262).

Et pourtant, écrivait Poincaré, sans cet instinct obscur *la science serait impossible*. Comment concilier l'inconciliable ?

Il y eut certes, jusque là, l'habitude de se référer à Laplace et d'user du principe de raison (in)suffisante comme argument. Argument douteux, puisqu'il revient en pratique à définir la probabilité à partir du probable, en supposant que les différents cas possibles sont également probables puisque nous n'avons pas de raison d'affirmer le contraire. Comment un esprit comme Poincaré, en recherche d'un terrain raisonnablement solide pour utiliser les mathématiques du hasard, aurait-il pu se contenter d'un tel cercle vicieux ?

Il faut noter au passage qu'il n'était pas, loin s'en faut, le premier à s'en préoccuper. Et d'ailleurs, on l'a dit, dès la mort de Laplace, les points faibles de l'approche de ce dernier avaient été soulignés : cercle vicieux de la définition de la probabilité par la possibilité, absence de réponse à la question générale de la nature de la probabilités des causes dans l'application du principe de Bayes, sans parler des égarements sur les applications notamment juridiques dont nous avons déjà parlé... Et l'on avait cherché, plus ou moins en vain, une théorie de substitution. Ce problème de fixer la valeur *naturelle* des probabilités fut notamment une obsession pour les psychologues et logiciens allemands dans toute la seconde moitié du 19ème siècle ([42]). Von Kries en particulier était arrivé, une bonne dizaine d'années avant Poincaré, à mettre sur pied le principe d'une méthode permettant de justifier l'attribution de probabilités égales aux différentes issues d'une épreuve répétée un grand nombre de fois ([41]). Poincaré, sans nul doute, ignorait absolument tout de ces travaux, et cela d'autant plus qu'ils ne relevaient pas *stricto sensu* de la sphère mathématique.

Il s'agissait donc pour Poincaré de montrer que dans certains cas importants, on pouvait considérer que l'équiprobabilité des issues d'une expérience aléatoire résultait non seulement du bon sens mais d'un raisonnement mathématique, et echapper ainsi à la *malédiction* du principe de Laplace.

L'idée que Poincaré va développer est, à l'instar de celle de Von Kries, que la répétition de l'expérience un très grand nombre de fois finit par établir asymptotiquement une sorte d'équilibre, de compensation, qui fait que l'hypothèse d'équiprobabilité est raisonnable, même si l'on ne sait pas du tout quelle était la situation à l'origine des temps. Deux exemples vont être présentés de façon récurrente par Poincaré dans les différents textes ([64], [68] notamment) où il expose sa méthode des fonctions arbitraires : la répartition des petites planètes sur le Zodiaque et les cases rouges et noires d'une roulette. Ces deux exemples sont d'ailleurs fortement liés comme Poincaré lui même le signale (par exemple en [64], p.266).

Suivons d'abord les commentaires de Poincaré sur le cas plus élémentaire de la roulette ([64], p.267). La boule (il parle lui d'une aiguille), *lancée avec force*, s'immobilise après avoir fait un grand nombre de tours sur le cadran d'une roulette divisée régulièrement en secteurs noirs et rouges. Comment estimer la probabilité qu'elle s'immobilise dans un secteur rouge ?

L'idée de Poincaré est que, quand la boule tourne un grand nombre de fois avant de s'immobiliser, toute infime variation de l'impulsion initiale peut faire changer la couleur où la boule se stabilise. De ce fait, la situation revient au même que de considérer qu'il y a un très grand nombre de secteurs rouges et noirs sur le cadran. Je fais, dit Poincaré, la convention que la probabilité pour que cet angle soit compris entre θ et $\theta+d\theta$ égale $\varphi(\theta)d\theta$ où φ est une fonction dont je ne connais rien (puisqu'elle dépend de la façon dont l'aiguille a été mise en mouvement à l'origine, une fonction *arbitraire*. Poincaré signale tout de même, sans autre justification, que nous sommes *naturellement* conduits à supposer φ continue. La probabilité cherchée est l'intégrale de φ étendue à tous les secteurs rouges.

Désignons par ε la longueur d'un secteur sur la circonférence, et considérons un double intervalle de longueur 2ε contenant un secteur rouge et un secteur noir. Soient alors M et m respectivement le maximum et le minimum de φ sur le double intervalle considéré. Comme on peut considérer que ε est très petit, la différence $M-m$ est petite. Et puisque la différence entre l'intégrale sur les secteurs rouges et celle sur les secteurs noirs peut être majorée par

$$\sum_{k=1}^{\pi/\varepsilon}(M_k-m_k)\varepsilon$$

(où M_k and m_k sont respectivement le maximum et le minimum sur chaque double intervalle k de longueur 2ε de la subdivision du cadran), cette différence est petite et il est donc raisonnable de supposer que ces deux intégrales, dont la somme égale à 1, sont égales à 1/2.

Une fois de plus, la rédaction de Poincaré est assez leste. Il met en avant l'importance du fait que ε est petit *par rapport à l'angle total parcouru* mais sans donner beaucoup de détails sur comment il use de ce fait. Sa brièveté provient cela étant probablement du parallèle avec l'exemple qu'il a traité auparavant dont nous allons maintenant parler.

L'expression *petites planètes* désigne la ceinture d'astéroïdes présents entre Mars et Jupiter découverte progressivement jusqu'à la fin du 19ème siècle. La première apparition de questions de type statistique sur ces planètes semble remonter à la Douzième leçon du cours de 1896 ([63], p.142) où Poincaré s'interroge sur la façon dont on peut estimer la valeur probable de leur nombre N. Il met en place une méthode bayésienne à partir de la probabilité *a priori*, supposée de densité f pour qu'une petite planète existante ait été observée et cela lui permet d'effectuer le calcul de l'espérance *a posteriori* de N.

Dans [64], Poincaré s'intéresse à un phénomène remarquable : la répartition approximativement uniforme des petites planètes dans les différentes directions du zodiaque. Poincaré cherche à trouver des arguments pour justifier ce fait ([64], p.265 *et seq.*). Nous savons, dit Poincaré, que les petites planètes obéissent aux lois de Kepler, mais par contre nous ignorons absolument quelle était leur distribution initiale.

Soit alors b la longitude d'une petite planète à l'instant initial, et a son moyen mouvement. Au temps t, sa longitude est donc $at + b$. Comme on l'a dit, on ne sait rien de la distribution initiale et on va supposer qu'elle est donnée par une fonction arbitraire $\varphi(a, b)$, que Poincaré de nouveau impose régulière : il écrit *continue* mais dans la suite l'utilise en fait comme une fonction de classe C^∞.

La valeur moyenne de $\sin(at + b)$ est donnée par

$$\int\int \varphi(a, b) \sin(at + b) dadb.$$

Quand t devient grand, cette intégrale devient proche de 0. Poincaré utilise en fait là des intégrations par parties successives grâce aux dérivées de φ, alors qu'il aurait pu se contenter de la continuité et du lemme de Riemann-Lebesgue, mais comme on l'a déjà dit, Poincaré n'a pas pour préoccupation principale d'affiner ses hypothèses. *A fortiori*, pour tout entier naturel non nul n, les intégrales

$$\int\int \varphi(a, b) \sin n(at + b)\, dadb$$

et

$$\int\int \varphi(a, b) \cos n(at + b)\, dadb$$

sont également très petites pour t grand fixé. Par conséquent, si l'on désigne par ψ la densité de probabilité de la longitude à l'instant t, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{[0,2\pi[} \psi(u) \sin nu\, du \quad \text{et} \quad \int_{[0,2\pi[} \psi(u) \cos nu\, du$$

très voisines de 0. Le développement de Fourier de ψ amène donc à conclure que ψ est quasiment constante c'est à dire que la longitude d'une petite planète quelconque est en gros uniformément répartie sur le Zodiaque.

2.5 Battage des cartes

Si l'exemple des petites planètes illustre la sensibilité aux conditions initiales, celui de la théorie cinétique des gaz relève de la complexité des causes. Le nombre de molécules est si grand, et elles entrent en collision de façon si multiple qu'il est impossible de considérer le système qu'elles forment comme relevant simplement de la mécanique classique. En 1902 paraît le premier traité exposant les principes de la mécanique statistique, dû à Gibbs ([33]), qui développe deux grands exemples d'applications pour la nouvelle théorie : outre la théorie cinétique des gaz, il introduit la situation de mélange de deux liquides (une goutte d'encre lâchée dans un verre d'eau) pour présenter une évolution d'un système vers l'équilibre. Hadamard avait fait en 1906 un compte-rendu du livre de Gibbs pour le *Bulletin des sciences mathématiques* ([34]). Pour illustrer cette situation de mélange, il inventait la métaphore ingénieuse du battage d'un jeu de cartes par un joueur qui évolue vers une équirépartition des permutations possibles des cartes . Hadamard cependant ne proposait aucun traitement mathématique de la question et c'est Poincaré, dans l'article qu'il publie en 1907 dans le journal de Borel ([68] republié ensuite dans [69] et [70]), qui va le premier en faire une analyse. Il se limite en fait à un cas particulièrement simple, celui de deux cartes. Supposons, dit Poincaré, qu'on ait une probabilité p pour qu'après un battement, les cartes se retrouvent dans le mème ordre qu'avant ce battement et $q = 1 - p$ pour que leur ordre soit changé. Considérons qu'il y ait n battements et que le joueur qui bat les cartes gagne une somme S égale à 1 franc si l'ordre après ces n battements est inchangé, et -1 franc sinon. Un calcul direct d'espérance montre que

$$\mathbb{E}(S) = (p - q)^n,$$

puisque, dans un formalisme moderne, S s'écrit comme

$$\prod_{i=1}^{n} X_i$$

avec les $X_i = \pm 1$ indépendantes de loi (p, q) représentant le fait que le i-ème battage ait ou non changé l'ordre des cartes. De ce fait, sauf dans les cas triviaux $p = 0$ ou 1, $\mathbb{E}(S) \to 0$ quand n tend vers l'infini ce qui revient à dire que les deux états +1 et -1, et donc les deux ordres possibles, ont tendance à devenir équiprobables. On peut noter avec intérêt que Poincaré, pour le calcul de l'espérance de proche en proche, et sans avoir besoin de déterminer la loi de la variable S, a été inspiré par différents calculs d' espérance qu'il avait trouvés dans le Chapitre III du livre de Bertrand [9].

Comme le dit Poincaré, le résultat, la tendance à l'uniformité, reste vrai quel que soit le nombre de cartes mais la *démonstration serait compliquée*. C'est à cette situation générale que Poincaré s'attèle à l'occasion de la deuxième édition de son cours en 1912, dans un chapitre intitulé *Questions diverses* ajouté à l'édition de 1896, dont il constitue la première section. Assez curieusement, la méthode de démonstration que Poincaré met en œuvre, contrairement au cas de deux cartes, n'est pas d'inspiration probabiliste mais relève de la théorie des groupes et du théorème de Perron-Frobenius (on pourra consulter [76] pour des détails). Nous verrons dans la partie suivante que l'aspect non probabiliste n'échappa pas à Borel qui proposera une alternative. Le battage des cartes quant à lui allait connaître dans les années 1920 un spectaculaire regain d'intérêt.

3 Troisième partie : un héritage contrasté

Nous abordons maintenant l'héritage des considérations de Poincaré sur le hasard et les probabilités, qui est une question épineuse. En effet, Poincaré à bon droit ne saurait être considéré comme un probabiliste à part entière, au sens où le mot pourra s'appliquer à des personnalités de générations ultérieures comme Paul Lévy ou Andrei Nikolaievitch Kolmogorov. Car, comme on l'a déjà mentionné, les probabilités ne représentent qu'un très petit volume dans l'océan de la production du mathématicien. Qui plus est, il est assez difficile de repérer un résultat très précis, un théorème, portant sur la théorie des probabilités et dont l'obtention peut être portée au crédit de Poincaré qui s'est surtout attaché soit à peauffiner la présentation de résultats déjà existants, soit à explorer des aspects nouveaux mais sans être franchement obsédé par le fait de leur donner une structure un tant soit peu aboutie. On peut redire ici que, dans ce domaine plus que dans tout autre, c'est Poincaré que Poincaré a voulu convaincre, et de ce fait ses travaux touchant aux probabilités, y compris ses textes réflexifs, prennent souvent l'aspect d'écrits au fil de la pensée, assez diserts, qui illustrent l'opinion de Picard rapportée par K.Popoff ([73], p.89) : *il ne connaissait pas l'adage* pauca sed matura. Comme l'exprime Bernard Bru ([20], p.155), tout le monde à l'époque a lu Poincaré. Mais on a un peu l'impression qu'en ce qui concerne les travaux de probabilités, peu l'ont compris.

3.1 Cheminement borélien

Incontestablement, c'est Émile Borel qui fait ici figure d'exception. Non seulement, Borel a lu et compris, mais il va s'emparer du sujet de façon spectaculaire au point de devenir, lui, le premier probabiliste français du vingtième siècle. Nous allons examiner comment le passage de témoin s'est passé entre le maître et son jeune disciple.

Il faut commencer par signaler que le tournant probabiliste d'Émile Borel aura été une des plus singulières évolutions que l'on puisse observer chez un mathématicien vers 1900. Après avoir jeté les bases d'une profonde transformation de la théorie des fonctions, Borel était devenu un phare de l'analyse mathématique en France. Rien ne semblait alors le prédisposer à franchir le pas et à consacrer d'importantes forces à étudier, perfectionner et divulguer le calcul des probabilités dont la réputation douteuse dans la communauté mathématique que nous avons commentée plus haut aurait pu à juste titre le rebuter. Le contexte de ce virage probabiliste d'Émile Borel à partir de 1905, date de publication de son premier travail dans le domaine, a été étudié en détail, notamment dans les articles [30] et [55]. La différence majeure qu'on peut trouver entre la découverte des probabilités par Poincaré et par Borel, c'est que, pour ce dernier, elle aura été fortement influencée par une réflexion interne aux mathématiques et plus spécifiquement à des considérations sur le statut des objets mathématiques - notamment les nombres réels. On assiste en effet chez le mathématicien au cours des années qui précèdent 1905 à un éloignement de plus en plus prononcé du romantisme cantorien et de son attitude absolue, comme l'a bien souligné Anne-Marie Décaillot dans son bel ouvrage sur Cantor et la France ([29], p. 159). Borel remplace graduellement cette vision idéaliste, qui ne le satisfait plus, par un réalisme fortement teinté d'une forme de pragmatisme et l'approche probabiliste est alors apparue à Borel comme un moyen adéquat pour se confronter à diverses formes de la réalité : mathématique puis physique et pratique. . .

La meilleure synthèse qui résume l'esprit de Borel au sujet de la quantification du hasard se trouve dans le texte de Cavaillès [25] publié dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* ; il faut le voir au moins en partie comme un commentaire du fascicule de Borel sur l'interprétation des probabilités [18] qui clôturait la grande entreprise du Traité du Calcul des Probabilités commencée en 1922. Comme l'exprime lyriquement Cavaillès ([25], p.154), les probabilités apparaissent comme la seule voie d'accès envisageable au chemin de l'avenir dans un monde qui n'est plus doté des arêtes vives de la certitude mais se présente désormais comme le royaume flou des approximations. Borel, au moment de son virage probabiliste trente ans plus tôt, ne disait pas autre chose quand il affirmait qu'un coefficient de probabilité constituait une réponse tout à fait claire à de nombreuses questions, réponse correspondant à une réalité absolument tangible, et quand il ironisait sur les esprits qui renâclaient en disant préférer la certitude et prèfèreraient *peut-être aussi que 2 et 2 fissent 5.*

Je renvoie aux études approfondies mentionnées plus haut pour les détails sur ces questions. Ce que je veux m'attacher à regarder ici c'est comment Borel a articulé ses recherches sur le calcul des probabilités avec les considérations de son aîné. Dès son premier article, Borel annonce se placer dans la lignée de la position conventionnaliste de Poincaré ([13], p.123). Mais son but est d'illustrer le rôle que peut jouer les toutes neuves intégrale de Lebesgue et théorie de la mesure après avoir découvert avec surprise son intervention sous la plume du suédois Anders Wiman dans [86] (voir à ce sujet [30]).

> 'Les méthodes de M. Lebesgue permettent d'étudier [...] des questions de probabilités qui paraissent inaccessibles par les procédés d'intégration classique. D'ailleurs, dans les cas particuliers les plus simples, il suffira de se servir de la théorie des ensembles que j'avais appelés mesurables et auxquels M.Lebesgue a donné le nom de mesurables (B) ; l'application de cette théorie des ensembles mesurables au calcul des probabilités a été, à ma connaissance, faite pour la première fois par M. Wiman.' ([13], p.126)

Je ne m'étendrai pas ici sur les transformations radicales qu'apporta à l'Analyse au début du vingtième siècle l'intégrale de Lebesgue. Un tableau très complet est donné dans [37] auquel le lecteur intéressé pourra se reporter. Néanmoins, par souci de complétude, disons quand même quelques mots sur le rôle de Borel dans l'élaboration de cette théorie.

Dans sa thèse qui portait sur des questions de prolongement de fonctions analytiques, Borel fabriquait un nouveau concept de prolongement plus général que celui de Weierstrass avec beaucoup d'imagination géométrique. Au cours de sa démonstration, il montrait qu'un sous-ensemble dénombrable d'un intervalle peut être recouvert par une suite d'intervalles de longueur totale aussi petite que l'on veut. Il s'agissait probablement là de la première apparition d'un argument de σ-additivité de mesure linéaire d'un ensemble. Dans les années qui suivirent, Borel étoffa considérablement sa construction, notamment dans son ouvrage [12], en introduisant la notion d'ensemble mesurable et de mesure grâce à la σ-additivité. Ces concepts gardaient cependant chez Borel une extension limitée car les ensembles qu'il considérait étaient explicités à partir de réunions dénombrables et de complémentaires, obligeant Borel à faire la suggestion bancale d'attribuer une mesure *inférieure à* α à un sous-ensemble d'un ensemble mesurable de mesure α.

Il fallut attendre la thèse de Lebesgue et la publication de sa Note [45] inventant une nouvelle façon de concevoir l'intégration pour que la notion d'ensemble mesurable prenne toute son ampleur sur laquelle s'assoit la formidable souplesse de l'intégrale qu'exploitait Borel dans son article [13]. Il y montrait notamment comment l'utilisation de l'intégrale de Lebesgue pouvait permettre de donner un sens à certaines questions formulées de façon probabiliste : une des plus simples était par exemple le fait d'attribuer une probabilité nulle au fait qu'un nombre réel tiré au hasard dans l'intervalle [0,1] soit rationnel. Insistons sur le fait que pour Borel l'aspect fondamental était plus que l'intégrale de Lebesgue permettait de donner un sens à la question, que le fait qu'elle y fournissait la réponse. On voit là Borel s'inscrire tout à fait dans le conventionnalisme de Poincaré, mais le choix de la convention (identifier la probabilité à la mesure d'un sous-ensemble de [0,1]) se fait d'abord sur une considération mathématique.

Mais c'est surtout dans son grand article de 1906 sur la théorie cinétique des gaz ([14]) que Borel allait se positionner en continuateur de Poincaré, tout en introduisant de toutes nouvelles considérations montrant qu'il commençait à tracer son propre sillon. Il tient d'ailleurs lui même à signaler ([14], p.11, note 2) qu'en un certain nombre de points, il s'écarte, dans son approche, des considérations de Poincaré.

Le but de Borel était de fournir un véritable modèle mathématique de la théorie de Maxwell afin de satisfaire les mathématiciens.

> 'Je voudrais m'adresser à tous ceux qui, au sujet de la théorie cinétique des gaz, partagent l'opinion de Bertrand que les problèmes de probabilité sont semblables au problème de trouver l'âge du capitaine quand on connaît la hauteur du grand mât. Si leurs scrupules sont justifiés jusqu'à un certain point parce qu'on ne peut reprocher à un mathématicien son amour de la rigueur, il ne me semble cependant pas impossible de les contenter.
>
> C'est le but des pages qui suivent : elles ne font faire aucun progrès réel à la théorie du point de vue physique ; mais elles arriveront peut être à convaincre plusieurs mathématiciens de son intérêt, et, en augmentant le nombre de chercheurs, contribueront indirectement à son développement. Si c'est le cas, elles n'auront pas été inutiles, indépendamment de l'intérêt esthétique présent dans toute construction logique.' ([14], p.10)

On peut d'ailleurs lire en creux dans ce programme que Borel se fixe qu'il considère que les études menées par Poincaré n'ont pas suffi à convaincre les mathématiciens. Notons au passage que Poincaré, la même année 1906, écrivit un article pour le Journal de Physique afin de creuser la théorie cinétique des gaz dans ses aspects thermodynamiques ([67]) ; il n'y a probablement pas de lien entre la publication de Poincaré et celle de Borel qui ne traitent pas du tout des mêmes questions.

Borel dans son article reprend un des thèmes majeurs de Poincaré, la répartition des petites planètes qu'il regarde sous un angle nouveau. Puis, il applique les résultats obtenus à la construction d'un modèle mathématique permettant de déduire la loi de répartition des vitesses de Maxwell. L'idée fondamentale de Borel est que dans l'espace des phases dont les coordonnées sont les vitesses des différentes particules, la somme des carrés de ces vitesses à un instant t est égale (ou plus exactement proportionnelle) à n fois l'énergie cinétique moyenne, ce qui fait que le point représentant le système des vitesses appartient à une sphère de rayon proportionnel à $\sqrt{n}$. Borel poursuit alors avec une étude asymptotique de la mesure uniforme sur la boule de rayon $\sqrt{n}$ en dimension n. Je renvoie à [81], [82] et [53] pour des détails sur ce sujet, me contentant de faire quelques commentaires sur la première partie de [14] concernant les petites planètes.

Considérant un cercle sur lequel des points représentent la position longitudinale des petites planètes, Borel part de la question suivante : Quelle est la probabilité pour qu'à une certaine date toutes les petites planètes soient situées sur un même demi-cercle fixé à l'avance ? Comme Borel le signale, si l'on avait une connaissance parfaite des positions des planètes, il n'y aurait aucun sens à faire appel à des questions de probabilités puisqu'on pourrait directement dire si l'événement est ou non réalisé. Il évoque alors la nécessité de transformer la question pour qu'elle prenne un sens probabiliste en vertu de différentes conventions. La convention la plus élémentaire serait de demander que pour chaque planète la probabilité d'être sur le demi-cercle C_1 choisi soit égale à celle d'être sur son complémentaire (et donc égale à $1/2$), mais aussi que les différentes planètes soient situées indépendamment les unes par rapport aux autres. Auquel cas, naturellement, s'il y a n planètes, le résultat cherché est $1/2^n$. Or, si cette indépendance était plus ou moins tacitement considérée par Poincaré, Borel la récuse comme étant peu convaincante, les planètes ayant clairement des influences mutuelles ([14], p.12) et il désire s'en affranchir. Borel, en élargissant progressivement son problème initial, arrive à la formulation asymptotique suivante ([14], p.15) :

> Problème C. - Connaissant à ε près les moyens mouvements des n petites planètes et connaissant exactement leurs positions initiales, on désigne par $\overline{\varpi}$ la probabilité pour qu'à une époque t choisie arbitrairement dans un intervalle a, b tous les points P correspondants soient sur C_1. Quelle est la limite vers laquelle tend $\overline{\varpi}$ lorsque l'intervalle a, b augmente indéfiniment ? ([14], p.15)

Borel peut alors mettre en œuvre une méthode des fonctions arbitraires en dimension n, sans supposer l'indépendance initiale du mouvement des planètes, et démontrer qu'asymptotiquement la probabilité cherchée est $1/2^n$, résultat ergodique montrant une indépendance asymptotique qu'il obtiendra ensuite dans le cas de son modèle pour la théorie cinétique des gaz avec les lois gaussiennes. Détail qui ne manque pas de sel, le résultat énoncé et montré par Borel de convergence de la loi uniforme sur la sphère de rayon $\sqrt{n}$ de l'espace de dimension n vers des gaussiennes indépendantes est qualifié aujourd'hui du nom de *Lemme de Poincaré* bien qu'il soit totalement absent de l'œuvre de ce dernier (pour des détails sur cette question voir [53] et les références incluses).

Il ne m'a pas été possible de clairement discerner si Poincaré s'est en quoi que ce soit intéressé aux recherches et aux travaux de son cadet en théorie des probabilités. Le seul signe qui pourrait indiquer au moins un certain respect est le fait qu'il ait accepté d'écrire pour la *Revue du Mois* l'article "Le hasard" ([68]) que nous avons mentionné à plusieurs reprises. Mais, sauf erreur, chez Poincaré, aucun commentaire sur des travaux de Borel et, peut être encore plus surprenant quand on pense à ce qu'avaient été ses recherches au début des années 1890, aucun signe du moindre intérêt pour la théorie de la mesure appliquée aux mathématiques de l'aléatoire. Poincaré, là aussi, est resté comme sur le seuil d'un espace qu'il avait pourtant contribué à faire émerger.

3.2 Descendance markovienne

Pour terminer ce tour d'horizon sur l'héritage probabiliste de Poincaré, tournons nous vers ce qui fut peut être la déscendance la plus inattendue de ses travaux : le développement fulgurant, à partir de la fin des années 1920, de la théorie des chaînes et des processus de Markov. Cette histoire a déjà été racontée, elle aussi, dans un certain nombres de textes et je me contenterai de nouveau d'en indiquer les points les plus saillants en renvoyant au fur et à mesure le lecteur à différentes publications pour des précisions supplémentaires.

Nous avons parlé plus haut des considérations de Poincaré sur le battage des cartes et sur le fait que dans sa démonstration de la convergence vers la loi uniforme dans [70], il avait usé d'une méthode algébrique exploitant assez peu la structure probabiliste du modèle. Borel, lecteur attentif, en prend immédiatement conscience et rédige une note, qu'il demande à Poincaré de présenter aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* dans la seule lettre de Borel mise en ligne sur le site des Archives Poincaré[1].

Borel écrit à son aîné le 29 décembre 1911

> 'Je viens de lire le livre que vous avez eu l'amabilité de me faire envoyer ; je n'ai pas besoin de vous dire combien les parties neuves m'ont intéressé, en particulier votre théorie du battage. J'ai essayé de la mettre à la portée de ceux qui ne sont pas familiers avec les nombres complexes, et il m'a semblé que j'obtenais ainsi une proposition un peu plus générale. Si elle est nouvelle, et si elle vous paraît intéressante, je vous demanderai de communiquer la note ci-jointe.'

Poincaré ne fera pas traîner la chose puisque la note est présentée dès le 3 janvier 1912. La méthode de Borel dans [16] prolonge en fait celle, élémentaire, avec laquelle Poincaré avait traité le cas de deux cartes, où l'on regarde l'évolution des moyennes successives au cours du temps, d'une façon qui deviendra classique pour démontrer la convergence à vitesse exponentielle d'une chaîne de Markov irréductible finie vers sa probabilité stationnaire (voir par exemple [10], p.131), ici uniforme en raison du caractère réversible . Borel se donne même le luxe d'introduire une dépendance en temps (rendant la chaîne inhomogène).

Il se place dans le cas régulier où il existe un ε tel que, à tout instant, les probabilités de transition d'une permutation vers une autre à un instant ultérieur soient toutes supérieures à ε. Appelons avec Borel $p_{j,n}$ la probabilité de la j-ème permutation possible du jeu de carte avant la n-ième opération. En désignant par $\alpha_{j,h,n}$ la probabilité pour que lors de la n-ième opération A_h soit remplacé par A_j, on a

$$p_{j,n+1} = \sum_{h=1}^{h=k} \alpha_{j,h,n} p_{h,n}$$

avec la contrainte $\sum_{h=1}^{k} \alpha_{j,h,n} = 1$ où k désigne le nombre de permutations possibles. On remarque alors immédiatement que P_n et p_n, le plus grand et le plus petit des $p_{j,n}$, forment deux suites respectivement décroissantes et croissante. Soient P et p leurs limites. Pour $\eta > 0$ donné, on peut choisir n à partir duquel $P_n \leq P + \eta$, et donc tous les $p_{j,n}$ sont inférieurs à $P + \eta$. On peut écrire au bout de N opérations

$$p_{j,n+N} = \sum_{h=1}^{h=k} \beta_{j,h,n} p_{h,n} \ , \ \sum_{h=1}^{h=k} \beta_{j,h,n} = 1$$

où les $\beta_{.}$ sont les probabilités de transition entre le temps n et le temps $n+N$, toutes supérieures à ε par hypothèse. Considérons le plus petit des $p_{h,n}$, $p_{h_0,n}$ et on a donc $p_n = p_{h_0,n} \leq p$.

[1] http ://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/

Par simplicité, notons β son coefficient $\beta_{j,h_0,n}$; par hypothèse, $\beta \geq \varepsilon$. Notons qu'on a $\sum_{h=1,h\neq h_0}^{h=k} \beta_{j,h,n} = 1-\beta$. De ce fait, on peut écrire, en choisissant j tel que $p_{j,n+N}$ est supérieur ou égal à P,

$$P \leq p_{j,n+N} \leq \beta p + (1-\beta)(P+\eta) = P + (1-\beta)\eta - \beta(P-p)$$

et donc

$$P - p \leq \frac{1-\beta}{\beta}\eta \leq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\eta.$$

η pouvant être choisi aussi petit qu'on veut, on en déduit que $P = p$ et donc qu'asymptotiquement les $p_{j,n}$ deviennent tous égaux à $1/k$. Remarquons au passage qu'en ce temps béni où on osait publier des fautes, Borel s'est trompé dans l'écriture de son inégalité, en nommant directement ε le nombre que nous avons appelé β ce qui naturellement au final ne change rien.

Personne ne semble avoir fait la moindre attention à la note de Borel : quand ces résultats seront retrouvés par Lévy puis Hadamard dans les années 1920 aucun d'eux n'avait visiblement la moindre idée de son existence (voir à ce sujet les lettres de Lévy à Fréchet [6], p.137 à 141).

Il nous faut alors laisser passer cinq ans et parcourir quelques centaines de kilomètres vers l'est pour voir entrer en scène un nouveau protagoniste, le mathématicien tchèque Bohuslav Hostinský. Qui plus est, comme s'il ne suffisait pas de devoir évoquer un mathématicien méconnu, il nous faut auparavant parler d'un philosophe inconnu. Car, celui qui fut peut être avec Borel le lecteur contemporain le plus attentif des textes de Poincaré sur les probabilités était un autre tchèque, le philosophe Karel Vorovka (1879-1929) dont l'influence sur Hostinský fut décisive.

Ce n'est pas le lieu de parler en détail de ce personnage singulier et je me contenterai donc de donner quelques éléments expliquant sa présence dans cette galère. Une intéressante et très complète étude sur lui a été publiée en tchèque il y a quelques années [56] dont il faut espérer qu'elle sera un jour accessible en une langue plus répandue. On pourra trouver aussi quelques compléments dans [52] et dans les références incluses. Deux raisons principales étayent d'ailleurs cette méconnaissance de Vorovka : le fait que ses travaux, en grande majorité en tchèque, n'ont jamais été traduits, et également qu'étant décédé assez jeune, il n'eut pas vraiment le temps de rassembler ses idées dans un ouvrage à plus grande échelle. S'inscrivant dans la tradition de Bernhard Bolzano (1771-1848), la grande figure de la scène philosophique pragoise du 19ème siècle, Vorovka chercha sa voie dans une approche faisant place à la fois à sa solide formation mathématique et à une morale religieuse assez rigide, un original syncrétisme d'empirisme et d'idéalisme qui n'est pas sans lien avec la pensée du héros de l'indépendance tchécoslovaque du moment, T.G.Masaryk et avec la philosophie pragmatique américaine à laquelle il s'intéressa beaucoup. La découverte des écrits réflexifs de Poincaré au début du 20ème siècle fut pour Vorovka une véritable révélation : il en tira la conviction que le grand chambardement des découvertes scientifiques de la fin du 19ème siècle, notamment en Physique, imposait de repenser le libre-arbitre de l'homme sur de nouvelles bases. Là où Vorovka fit preuve d'originalité, c'est qu'il ne se limita pas aux principes, mais étudia de près les problèmes mathématiques soulevés par la théorie des probabilités. Il fut un lecteur assidu du traité de Bertrand, des textes de Borel, mais aussi de Markov, publiant quelques travaux mathématiques inspirés par des articles du mathématicien russe (voir [50], [83], [84], [85]). Au moment de sa pleine activité à l'Université Tchèque de Prague, autour des années 1910, Vorovka fit connaissance du mathématicien Bohuslav Hostinský qui venait de revenir en Bohême après un séjour d'étude à Paris. Aux dires d'Hostinský lui-même (voir [40]), c'est par les discussions qu'il eut avec Vorovka qu'il apprit à connaître les travaux de Poincaré et à commencer à réfléchir au calcul des probabilités, assez éloigné de sa spécialité originelle (la géométrie différentielle).

Selon Jiří Beránek, qui fut après la seconde guerre mondiale l'un des derniers assistants de Hostinský à l'Université de Brno, une autre source d'intérêt de ce dernier pour le calcul des probabilités se trouve dans l'influence qu'eut sur lui la lecture de l'article écrit en 1911 par Paul et Tanya Ehrenfest sur la Mécanique Statistique pour l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, repris et complété par Borel pour la version française de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* [31].

Beránek écrit ([8]) que cet article, dont le retentissement fut considérable

> 'mettait l'accent sur les méthodes statistiques en physique, à côté des méthodes géométriques, principalement en relation avec les travaux de L. Boltzmann sur la théorie cinétique des gaz. Sur celles-ci furent menées discussions et controverses, au sujet de l'exactitude et de la légitimité des méthodes mathématiques employées. Hostinský, comme il l'a lui même mentionné, commença à partir de 1915 à étudier les travaux de Boltzmann et à s'intéresser aux efforts qui étaient faits pour donner à la théorie cinétique des bases mathématiques précises. Le point central de ceux-ci nécessitait un nouvel examen de certaines questions fondamentales de la théorie des probabilités. Hostinský fut particulièrement impressionné à ce sujet par les travaux fondamentaux de H. Poincaré sur les fondements du calcul des probabilités qui ouvraient la voie à de nouvelles méthodes nécessaires pour le perfectionnement de la théorie cinétique. Pour cette raison, vers 1917, Hostinský commença à s'occuper sérieusement de question de calcul des probabilités...'

Le fait qu'Hostinský se plongea dans le calcul des probabilités en 1917 est attesté par son journal personnel, conservé par les Archives de l'Université Masaryk à Brno. Jusqu'à 1917, il ne contient que des commentaires sur la géométrie différentielle. Le 10 janvier 1917, Hostinský fait quelques observations sur l'étude du mélange des cartes par Poincaré d'après [70] et le 18 janvier sur des problèmes de loterie. Un premier article paraît quelques mois plus tard dans les *Rozpravy České Akademie*, traitant du problème de l'aiguille de Buffon [39].

Le problème de l'aiguille est l'un des classiques du calcul des probabilités dont Hostinský commence par rappeler l'énoncé.

> 'On lance une aiguille cylindrique sur un plan horizontal, où sont tracées des parallèles équidistantes ; la distance $2a$ de deux parallèles voisines est supposée plus grande que la longueur $2b$ de l'aiguille. Quelle est la probabilité pour que l'aiguille rencontre l'une des parallèles ?'

Buffon avait proposé une solution dont le résultat numérique, $\frac{2b}{\pi a}$, qui faisait apparaître π était une source de fantasmes pour un calcul "expérimental" de π. Mais en fait, la démonstration de Buffon s'appuyait sur l'hypothèse que le lieu où se trouve le centre de l'aiguille est localisé indifféremment sur le plan et Hostinský, dans une deuxième partie critique, mentionne, comme Carvallo l'avait fait avant lui en 1912, l'irréalisme d'une telle supposition. Un dispositif expérimental ne peut que se présenter sous la forme d'une table de taille finie, et alors il est clair que selon qu'on choisit un petit carré C_1 au centre de la table et un autre C_2, de même surface, sur un de ses bords, la probabilité p_1 que le centre de l'aiguille se trouve dans C_1 et celle p_2 qu'il se trouve dans C_2 ne pourront être les mêmes : en effet, la contrainte que l'aiguille ne tombe pas de la table jouera très fortement sur C_2, et très peu pour C_1, ce qui fait qu'intuitivement on doit avoir $p_1 >> p_2$.

Hostinský considère donc indispensable de ne pas supposer connue *a priori* la loi de probabilité de localisation de l'aiguille. Il s'agit donc d'une loi (à densité) *inconnue* $f(x, y)dxdy$. Or, mentionne Hostinský, Poincaré lui aussi, dans la résolution de certains problèmes de probabilités, s'est autorisé à considérer une telle densité *arbitraire* et a observé qu'il pouvait se faire que cette fonction n'apparaisse en fait pas dans le résultat final. Hostinský se propose de démontrer que si un domaine A de l'espace est segmenté en m domaines élémentaires de même volume ε, dont chacun est composé d'une partie blanche de volume $\lambda\varepsilon$ et d'une partie noire de volume $(1 - \lambda)\varepsilon$ (où $0 < \lambda < 1$), alors pour n'importe quelle fonction $\varphi(x, y, z)$ assez régulière, l'intégrale sur les parties blanches sera asymptotiquement (quand m tend vers l'infini) égale à λ fois l'intégrale de φ sur A.

Hostinský applique alors ce résultat pour offrir une solution *nouvelle* au problème de l'aiguille. Au lieu de l'hypothèse irréaliste de Buffon, il suppose que le centre de l'aiguille est astreint à tomber dans un carré de côté $2na$ avec une densité de probabilité donnée par une fonction inconnue φ (qu'il suppose avoir des dérivées bornées) et garde par contre la deuxième hypothèse concernant la distribution uniforme de l'angle ω que fait l'aiguille avec les parallèles. Ceci posé, en divisant le domaine d'intégration $0 < x < 2na, 0 < y < 2na, 0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ en n^2 sous-domaines (en partitionnant les valeurs de x et de y suivant les multiples de a), chacun de ces petits domaines se trouve lui même séparé en deux parties (correspondant au fait que l'aiguille coupe (partie *blanche*) ou ne coupe pas (partie *noire*) la parallèle correspondante) dont le rapport des volumes au volume total du sous-domaine est constant et égal pour la partie blanche à $\frac{2b}{\pi a}$. L'application du théorème précédent permet alors d'affirmer qu'il s'agit là effectivement de la probabilité cherchée, du moins asymptotiquement quand n tend vers l'infini.

Au printemps 1920, voulant profiter de la bonne presse dont jouissait la jeune Tchécoslovaquie auprès de l'opinion française, Hostinský avait envoyé à Émile Picard la traduction de son article et Picard lui propose dès réception (18 avril 1920) de l'inclure dans les Mélanges du *Bulletin des Sciences Mathématiques.* Cette version très légèrement remaniée de l'article de 1917, parait dès la fin de l'année 1920 et Maurice Fréchet, qui vient d'arriver à Strasbourg et se sent une âme de missionnaire [78], la lit avec attention, ainsi qu'il le mentionne dans la lettre suivante datée du 7 novembre 1920 où il félicite Hostinský d'avoir obtenu un *résultat positif.*

Comme on vient de le voir, à l'instar de Poincaré, Hostinský exige de la fonction φ qu'elle admette une dérivée uniformément bornée dans le domaine A de façon à obtenir une majoration de la différence entre le maximum et le minimum de φ sur chacun des petits domaines. Or, Fréchet, quand il lit l'article doit se rendre compte, à juste titre, qu'à partir du moment où l'on n'a besoin que d'une estimation des intégrales de φ sur ces domaines, la convergence simultanée des sommes de Darboux supérieure et inférieure vers l'intégrale de φ permet d'obtenir le résultat cherché avec φ intégrable (au sens de Riemann). C'est ce qu'il écrit, démonstration à l'appui, à Hostinský le 7 novembre 1920.

Il semble que la présente lettre expose le premier travail de recherche de Fréchet sur des questions probabilistes, qui sera publié dans une courte note en 1921 ([32]). Hostinský répond le 22 décembre 1920, en confirmant à Fréchet qu'il est d'accord avec sa remarque sur la suffisance de l'hypothèse d'intégrabilité, non sans avoir tout de même mentionné que Borel avait déjà signalé que l'hypothèse de Poincaré pouvait être affaiblie en supposant seulement la fonction continue. C'est en effet dans son cours de Calcul de Probabilités publié en 1909 chez Hermann [15], où Borel avait consacré tout le Chapitre VIII à l'*Introduction des fonctions arbitraires*, en reprenant les exemples de Poincaré comme la roulette ou la position des petites planètes sur le Zodiaque, qu'il mentionnait que l'hypothèse de continuité était suffisante pour appliquer la méthode de Poincaré. Fréchet devait inclure la remarque d'Hostinský à sa note de 1921 (dont il signalait d'ailleurs qu'elle lui avait bien été inspirée par ce dernier à la suite de son article sur l'aiguille de Buffon). Dans [32], il mentionnait aussi Borel pour signaler aussitôt que l'hypothèse de continuité, à l'instar de celle de dérivabilité de Poincaré, était inutile et que l'intégrabilité (au sens de Riemann) suffisait.

La relation bien engagée avec Fréchet encouragea Hostinský à poursuivre ses études probabilistes, et cela nous amène, enfin, à la dernière étape de ce long périple, avec l'entrée en scène de Jacques Hadamard (1865-1963). La présence de ce nom dans l'histoire dont nous parlons est plutôt surprenante, et en fait, Hadamard ne va s'intéresser aux probabilités que le temps d'un semestre décisif de l'année scolaire 1927-1928. Il n'en a jamais fait avant, et n'en fera jamais après, marquant même une certaine irritation envers Lévy, un des disciples sur lequel il fondait le plus d'espoirs, quand celui-ci, dilapidant l'héritage, avait abandonné la voie royale de l'Analyse fonctionnelle pour le Calcul des probabilités. A l'instar de Poincaré, Hadamard n'avait jamais perdu de vue les théories physiques à la source desquels il compte puiser de nouveaux problèmes mathématiques. C'est dans cette optique qu'il avait fait, comme nous l'avons vu, le compte-rendu du livre de Gibbs en 1906.

Quand, dans les années 1920, Hadamard entreprit la rédaction de son Cours d'analyse de l'École Polytechnique (publié chez Hermann en deux volumes en 1926 et 1930), il en arriva en 1927 aux leçons sur la théorie des probabilités et reprit le battage des cartes de Poincaré. A cette occasion, il retrouvait la méthode des moyennes successives de Borel et publia en 1927 une note aux CRAS [35]. Hostinský devait découvrir la note d'Hadamard en 1927, et en envoyer un prolongement sous forme de note aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* [38] publiée dans les premiers jours de 1928. Là, pour la première fois, avant tout le monde et notamment avant Kolmogorov, était introduit un modèle markovien en temps continu. Le bouillonnement qui en résulta, notamment au congrès de Bologne en septembre 1928, inaugura l'intense activité sur ces questions qui se poursuivit pendant toutes les années 1930, histoire magnifiquement racontée dans [20] auquel je renvoie le lecteur intéressé. Ce couronnement inattendu des efforts de Poincaré me semble un moment tout indiqué pour prendre congé du maître.

Conclusion

Poincaré aura vécu ce moment très particulier de l'histoire où le hasard a fait son entrée, de plus en plus insistante, dans le bel équilibre déterministe de la cosmologie de Newton et Laplace qui dominait la pensée scientifique depuis des décennies.

Une conférence de Paul Langevin datant de 1913[44] en donne la mesure, mettant en parallèle l'introduction des probabilités et un changement radical dans notre compréhension des lois structurelle de la matière. Un esprit pénétrant comme celui de Poincaré n'avait pu vivre cette irruption que comme un traumatisme, auquel il dut faire face avec les moyens dont il disposait. Ces moyens, on l'a dit, étaient d'abord mathématiques, car Poincaré était d'abord un mathématicien. Mais une difficulté était que les mathématiques du hasard auxquelles il avait accès n'avaient pas encore atteint le degré de puissance nécessaire pour traiter de nombreux problèmes qui émergeaient de la physique moderne. Rappelons cet apophtegme du maître :

> 'La physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes ; elle nous aide à en trouver les moyens, et cela de deux manières. Elle nous fait pressentir la solution ; elle nous suggère des raisonnements.' ([66], p.152)

Et les nouvelles théories physiques auxquelles Poincaré fut confronté suggéraient de développer la théorie des probabilités. Dans tout cela réside l'apparent paradoxe qui habita le mathématicien au tournant du vingtième siècle : les hésitations et les réticences devant les problèmes posés par la mécanique statistique, les tentatives un peu hésitantes pour mettre une théorie probabiliste sur des bases consolidées, le faible engouement apparent pour les nouvelles mathématiques, notamment la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue, qui pouvaient fournir des outils décisifs face à un certain nombre de problèmes. Poincaré, on l'a dit, reste un homme du 19ème siècle, un peu, peut-être, à la manière dont Klein, malicieusement, avait fait de Gauss un savant du 18ème siècle. Evidemment, dans le cas de Gauss, l'ironie venait du fait qu'il avait vécu les deux tiers de sa vie au 19ème siècle, alors que la mort surprit Poincaré au début du nouveau siècle. Mais on pourrait spéculer, ce que nous ne ferons pas, sur la manière dont notre héros se serait adapté aux transformations qui lui ont succédé. Quoi qu'il en soit, à l'instar de son glorieux prédécesseur, Poincaré avait beaucoup semé et l'éclosion spectaculaire de plusieurs de ses idées allait occuper d'innombrables chercheurs après sa disparition. Pour ce qui est des probabilités, je crois que l'on peut résumer ainsi la mesure de son influence : avoir permis au domaine de commencer à sortir de la zone grise dans laquelle il était cantonné par nombre de ses collègues, avoir commencé à introduire certaines méthodes qui allaient fructifier quand elles pourraient s'appuyer sur des théories mathématiques de plus large envergure, avoir convaincu Borel de l'importance de certaines questions à l'étude desquelles ce dernier allait désormais consacrer beaucoup d'énergie. Pour un sujet plutôt marginal, comme on l'a dit, dans l'œuvre de Poincaré, un tel bilan n'est franchement pas négligeable.

Références

[1] Appel, Paul, Darboux, Gaston, Poincaré, Henri : Examen critique des divers systèmes ou études graphologiques auxquels a donné lieu le bordereau. Rapport à la Cour de Cassation. Electronic Journal for History of Probability and Statistics (www.jehps.net) **1**, 1 (2005).

[2] Atten, Michel : La nomination de H. Poincaré à la chaire de physique mathématique et calcul des probabilités de la Sorbonne. Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques **9**, 221–230 (1988).

[3] Bachelier, Louis : Théorie de la spéculation. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, **17**, 21–86 (1900).

[4] Barberousse, Anouk : *La mécanique statistique de Clausius à Gibbs.* Paris, Belin, 2002.

[5] Barberousse, Anouk : La valeur de la connaissance approchée. L'épistémologie de l'approximation d'Émile Borel. Revue d'Histoire des Mathématiques **14**, fascicule 1, 53–75 (2008).

[6] Barbut, Marc, Locker, Bernard et Mazliak, Laurent : *Paul Lévy - Maurice Fréchet, 50 ans de correspondance.* Hermann, Paris, 2004.

[7] Barrow-Green, June : *Poincaré and the Three Body Problem, History of Mathematics.* Vol. 11, American Mathematical Society-London Mathematical Society, 1997.

[8] Beranek, Jan : *Bohuslav Hostinský (1884–1951).* Časopis pro pěstování matematiky **109**, 442–448 (1984).

[9] Bertrand, Joseph : *Calcul des Probabilités.* Gauthier-Villars, 1889 (accessible à l'url http ://gallica.bnf.fr).

[10] Billingsley, Patrick : *Probability and Measure* (3rd Ed). Wiley and Sons, 1995.

[11] Borel, Émile : Sur quelques points de la théorie des fonctions. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **3**, 12, 9–55 (1895).

[12] Borel, Émile : *Leçons sur la théorie des fonctions.* Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[13] Borel, Émile : Remarques sur certaines questions de probabilités. Bulletin de la Société Mathématique de France **33**, 123–128 (1905).

[14] Borel, Émile : Sur les principes de la théorie cinétique des gaz. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **23**, 9–32 (1906).

[15] Borel, Émile : *Eléments de la théorie des probabilités.* Hermann, Paris, 1909.

[16] Borel, Émile : Sur le battage des cartes. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **154**, 23–25 (1912).

[17] Borel, Émile : Mécanique statistique, d'après l'article allemand de P. Ehrenfest et T. Ehrenfest, Encyclopédie des Sciences Mathématiques, Tome IV, Vol. 1, 188–292, 1915 (réédition J. Gabay, 1991 ; en ligne sur gallica.bnf.fr).

[18] Borel, Émile : *Valeur pratique et philosophie des probabilités, Traité du calcul des probabilités et leurs applications.* (Émile Borel, éditeur), Gauthier-Villars, 1939.

[19] Borel, Émile : *Œuvres, Introduction et Bibliographie par M. Fréchet.* 4 Tomes, CNRS, Paris, 1972.

[20] Bru, Bernard : Souvenirs de Bologne. Journal Soc. Fra. Stat. **144**, 1–2 (2003).

[21] Bru, Bernard : Les leçons de calcul des probabilités de Joseph Bertrand. Electronic Journal for History of Probability and Statistics (www.jehps.net) **2**, 2 (2006).

[22] Bru, Bernard : Les probabilités dénombrables à la portée de tous. À paraître (2012).

[23] Cartier, Pierre : *Poincaré's Calculus of probability* in [26].

[24] Carvallo, Emmanuel : *Le calcul des probabilités et ses applications*. Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[25] Cavaillès, Jean : Du Collectif au Pari. Revue de Métaphysique et de Morale **XLVII**, 139–163 (1940).

[26] Charpentier, Eric, Ghys, Etienne and Lesne, Annick (Eds.) : *The scientific legacy of Poincaré, History of Mathematics*. Vol. 36, American Mathematical Society-London Mathematical Society, 2010.

[27] Courtault, Jean-Michel et Kabanov, Yuri : *Louis Bachelier. Aux origines de la finance mathématique*. Presses Univ. Franc-Comtoises, 2002.

[28] Crawford Elisabeth and Olff-Nathan, Josiane (Eds.) : *La science sous influence : l'Université de Strasbourg, enjeu des conflits franco-allemands*. Strasbourg, La Nuée bleue, 2005.

[29] Décaillot Anne-Marie : *Cantor et la France*. Kimé, 2008.

[30] Durand, Antonin and Mazliak, Laurent : *Revisiting the sources of Borel's interest for probability, Continued Fractions, Social involvement, Volterra's Prolusione*. *Centaurus*, 2011.

[31] Ehrenfest, Tanya and Paul : *Mécanique Statistique*. Traduit et complété par É. Borel à partir de la version allemande. Encyclopédie des mathématiques pures et appliquées. Jules Molk, éd., Tome IV, Vol. 1, 188–292, 1915.

[32] Fréchet, Maurice : Remarque sur les probabilités continues. Bulletin des sciences mathématiques **45**, 87–88 (1921).

[33] Gibbs, Josiah W. : *Elementary Principles in Statistical Mechanics*. Scribner, 1902.

[34] Hadamard, Jacques : Note de lecture sur J. Gibbs, "Elementary Principles in Statistical Mechanics". Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 194–210 (1906) ; voir également : Bulletin des sciences mathématiques **30**, 161–179 (1906).

[35] Hadamard, Jacques : Sur le battage des cartes. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **185**, 5–9 (1927).

[36] Havlova, Veronika, Mazliak, Laurent et Šišma, Pavel : Le début des relations mathématiques franco-tchécoslovaques vu à travers la correspondance Fréchet-Hostinský. Electronic Journal for History of Probability and Statistics (www.jehps.net) **1**, 1 (2005).

[37] Hawkins, Thomas : *Lebesgue's theory of integration*. Chelsea AMS, 1975.

[38] Hostinský, Bohuslav : Sur les probabilités relatives aux transformations répétées. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **186**, 59–61 (1928).

[39] Hostinský, Bohuslav : Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle (New solution of Buffon problem on needle), *Rozpravy Ceské Akademie*, XXVI, II, 13, 1917 (French translation : Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille, Bulletin des sciences mathématiques **44**, 126–136 (1920)).

[40] Hostinský, Bohuslav : *O činnosti Karla Vorovky ve filosofii matematiky*. Ruch filosofický **8**, 65–71 (1929).

[41] Kamlah, Andreas : Probability as a quasi-theoretical concept - J.V. Kries' sophisticated account after a century. Erkenntnis **19**, 239–251 (1983).

[42] Kamlah, Andreas : *The Decline of the Laplacian Theory of Probability, in The Probabilistic Revolution* (Volume 1). Edited by L. Krüger, L.J. Daston and M. Heidelberger, Massachusetts Institute of Technology, pp. 91–116, 1987.

[43] Kelvin, Lord (J.J. Thomson, dit) : On a Decisive Test-case disproving the Maxwell-Boltzmann Doctrine regarding Distribution of Kinetic Energy. Philosophical Transactions of the Royal Society **51**, 397–399 (1892).

[44] Langevin, Paul : La Physique du discontinu. Conférence à la Société française de Physique le 27 novembre 1913. Republiée dans : Langevin, Paul : *La Physique depuis Vingt ans*, Doin, 189–264 (1923).

[45] Lebesgue, Henri : Sur une généralisation de l'intégrale définie. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **132**, 1025–1028 (1901).

[46] Lévy, Paul : Sur le rôle de la loi de Gauss dans la théorie des erreurs. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **174**, 855–857 (1922).

[47] Lindeberg, Jarl Waldemar : Sur la loi de Gauss. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **174**, 1400–1402 (1922).

[48] Mansuy, Roger et Mazliak, Laurent : Introduction au rapport de Poincaré pour le procès en cassation de Dreyfus en 1904. Electronic Journal for History of Probability and Statistics (www.jehps.net) **1**, 1 (2005).

[49] Mansuy, Roger et Mazliak, Laurent : *L'analyse graphologique controversée d'Alphonse Bertillon dans l'affaire Dreyfus. Polémiques et réflexions autour de la figure de l'expert*. In Pierre Piazza : Alphonse Bertillon, aux origines de la police scientifique, Ed. Karthala, 2011.

[50] Марков, Андрей А. : К вопросу о разорении игроков (A.A.Markov : On the question of the gamblers' ruin). Bulletin de la Société Mathématique de Kazan, Série 2, Tome XIII, 38–45, 1905.

[51] Mazliak, Laurent : On the exchanges between Hostinský and Doeblin. Revue d'Histoire des Maths **13**, 155–180 (2007) *and* Electronic Journal for History of Probability and Statistics (www.jehps.net) **3**, 1 (2007).

[52] Mazliak, Laurent : An introduction to Karel Vorovka's philosophy of randomness. Electronic Journal for History of Probability and Statistics (www.jehps.net) **3**, 2 (2007).

[53] Mazliak, Laurent : The Ghosts of the École Normale. Life, death and destiny of René Gateaux. À paraître.

[54] Mazliak, Laurent : A study of a trajectory : Popoff, wars and ballistics. Almagest III, 1, May 2012.

[55] Mazliak, Laurent et Sage, Marc : Au delà des réels. Borel et l'approche probabiliste de la réalité. À paraître dans la Revue d'Histoire des Sciences (2013).

[56] Pavlincova, Helena : *Karel Vorovka*. Cesta matematika k filosofii, Filosofia, Praha, 2010.

[57] Pier, Jean-Paul : Henri Poincaré croyait-il au calcul des probabilités ? Philosophia Scientiae **1**, 4, 69–83 (1996).

[58] Poincaré, Henri : Sur le problème des trois corps et les équations de la mécanique. Acta Mathematica **13**, 1–270 (1890).

[59] Poincaré, Henri : *Thermodynamique*. Georges Carré, Paris, 1892.

[60] Poincaré, Henri : *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, I. Solutions périodiques ; non-existence des intégrales uniformes ; solutions asymptotiques.* (1892) ; *II. Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin.* (1893) ; *III. Invariants intégraux ; solutions périodiques du deuxième genre ; solutions doublement asymptotiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1892–99, 1899.

[61] Poincaré, Henri : Le Mécanisme et l'expérience. Revue de Métaphysique et de Morale **1**, 534–537 (1893).

[62] Poincaré, Henri : Sur la théorie cinétique des gaz. Revue générale des sciences pures et appliquées **5**, 11, 513–521 (1894).

[63] Poincaré, Henri : *Le calcul des Probabilités*. Georges Carré, Paris, 1896.

[64] Poincaré, Henri : Réflexions sur le calcul des probabilités. Revue générale des sciences pures et appliquées **10**, 262–269 (1899).

[65] Poincaré, Henri : *La science et l'hypothèse*. Flammarion, 1902.

[66] Poincaré, Henri : *La valeur de la Science*. Flammarion, 1905.

[67] Poincaré, Henri : Réflexions sur la théorie cinétique des gaz. Journal de Physique, 4ème série **V**, 369–403 (1906).

[68] Poincaré, Henri : Le hasard. Revue du mois **3**, 257–276 (1907).

[69] Poincaré, Henri : *Science et Méthode*. Flammarion, 1908.

[70] Poincaré, Henri : *Le calcul des Probabilités*. 2ème édition, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[71] Poincaré, Henri : Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré, faite par lui même. Acta Mathematica **38**, 1–135 (1921).

[72] Poisson, Denis Syméon : *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*. Bachelier, 1837.

[73] Попов, Кирил : Автобиография. Университетско Издателство "Св.Климент Охридски", София, 1993.

[74] Rollet, Laurent : Autour de l'Affaire Dreyfus : Henri Poincaré et l'Action politique. Revue Historique **CCXCVIII/3**, 49–101 (1999).

[75] Schneider, Ivo : *Laplace and Thereafter : The Status of Probability Calculus in the Nineteenth Century*. 191–214, 1987. In The Probabilistic Revolution (Volume 1), edited by L. Krüger, L.J. Daston and M. Heidelberger, Massachusetts Institute of Technology, p. 91–116, 1987.

[76] Seneta, Eugene : *Non-negative Matrices and Markov Chains*. 2nd Edition, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New-York, 1981.

[77] Sheynin, Oscar B. : H. Poincaré's work on probability. Archives for History of Exact Sciences **42**, 131–171 (1991).

[78] Siegmund-Schultze, Reinhardt : *Maurice Fréchet à Strasbourg*. Chapitre de [28].

[79] Tait, Peter G. : Poincaré's Thermodynamics. Nature **45**, 245-246 (1892).

[80] Von Kries, Johannes : *Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine logische untersuchung*. Akademische Verlagsbuchhandlung Mohr, 1886.

[81] Von Plato, Jan : Boltzmann's Ergodic Hypothesis. Archives for History of Exact Sciences **42**, 71–89 (1991).

[82] Von Plato, Jan : *Creating modern probability*. Cambridge University Press, 1994.

[83] Vorovka, Karel : Filosofický dosah počtu pravděpodobnosti. Česká mysl. **14**, 17–30 (1912).

[84] Vorovka, Karel : Poznámka k problému ruinováníhráčů (*A note to the problem of gamblers ruin*). Časopis pro pěstování matematiky, XLI, 1912.

[85] Vorovka, Karel : O pravděpodobnosti příčin *(On the probability of causes)*, Časopis pro pěstování matematiky, XLIII, 1914.

[86] Wiman, Anders : Über eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei Kettenbruchentwickelungen. Stockh. Öfv. **57**, 829–841 (1900).