Séminaire Poincaré XIV (2010) 221 – 246 Séminaire Poincaré

Le Système solaire est-il stable ?

Jacques Laskar
ASD, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, UPMC,
77, avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

Résumé. Depuis la formulation du problème par Newton, et pendant trois siècles, les astronomes et mathématiciens ont cherché à montrer la stabilité du Système solaire. Grâce aux expériences numériques des deux dernières décennies, nous savons maintenant que le mouvement des planètes dans le Système solaire est chaotique, ce qui interdit toute prédiction précise de leur mouvement au-delà de quelques dizaines de millions d'années. Les simulations très récentes montrent même que les collisions planétaires ou les éjections sont possibles sur une durée inférieure à 5 milliards d'année, avant la fin de la vie du Soleil.

1 Introduction historique[1]

En dépit des résultats fondamentaux de Henri Poincaré sur la non intégrabilité du problème des trois corps à la fin du XIXème siècle, la découverte de la non régularité du mouvement du Système solaire est très récente. Elle nécessitait en effet la possibilité de calculer le mouvement des planètes dans un modèle réaliste du Système solaire sur de très longues durées, de l'ordre de l'âge du Système solaire, ce qui n'a pu être effectué réellement que dans les dernières années. Jusqu'alors, et ce pendant trois siècles, les efforts des astronomes et des mathématiciens ont surtout consisté à chercher à montrer la stabilité du Système solaire.

1.1 La stabilité du Système solaire

Le problème de la stabilité du Système Solaire s'est posé depuis l'énonciation par Newton de la loi de gravitation universelle. Si on considère une planète unique autour du Soleil, on retrouve bien le mouvement elliptique de Kepler, mais dès que plusieurs planètes orbitent autour du soleil, elles sont soumises à leur attraction mutuelle qui vient perturber leur mouvement Keplérien. A la fin du volume d'Optique (1717, 1730), Newton lui-même exprime ses doutes sur cette stabilité qu'il pense pouvoir être compromise par les perturbations dues aux autres planètes et aux comètes dont on ignorait alors la très faible masse.

[1] Cette partie est tirée d'une conférence faite par l'auteur en le 19 octobre 2006 à l'Istituto Lombardo (Milan) en l'honneur de Lagrange : *Lagrange et la stabilité du Système solaire.*

> And to show that I do not take Gravity for an essential Property of Bodies, I have added one Question concerning its Cause, chosing to propose it by way of a Question, because I am not yet satisfied about it for want of Experiments.
> ...
> For while comets move in very excentrick orbs in all manner of positions, blind fate could never make all the planets move one and the same way in orbs concentrick, some inconsiderable irregularities excepted, which may have risen from the mutual actions of comets and planets upon one another, and which will be apt to increase, till this system wants a reformation.

Ces perturbations planétaires sont faibles car la masse des planètes du Système solaire est beaucoup plus petite que la masse du Soleil (1/1000 ème pour Jupiter), mais une des questions fondamentales de la science du XVIII ème siècle restera à la fois de savoir si la loi de Newton rend bien compte du mouvement des astres dans leur totalité, et par ailleurs si la stabilité du Système solaire est assurée malgré les perturbations mutuelles des planètes dues à la gravitation universelle. Ce problème était d'autant plus présent que les observations montraient que Jupiter se rapprochait du soleil alors que Saturne s'en éloignait. Dans la première édition de son "Abrégé d'Astronomie" (1774), De La Lande rend compte de ces problèmes posés par ces observations dans un chapitre sur les *termes séculaires.*

> Kepler écrivait en 1625 qu'ayant examiné les observations de Régiomontanus et de Waltherus, faites vers 1460 et 1500, il avait trouvé constamment les lieux de Jupiter & de Saturne plus ou moins avancés qu'ils ne devaient l'être selon les moyens mouvements déterminés par les anciennes observations de Ptolémée & celles de Tycho faites vers 1600.

A la suite des travaux de Le Monnier (1746a, b) qui, selon De La Lande[2]

> a démontré le premier, d'une manière suivie et détaillée, après un travail immense sur les oppositions de Saturne (Mémoire de l'Académie 1746), que non seulement il y a dans cette planète des inégalités périodiques dépendantes de la situation par rapport à Jupiter, mais que dans les mêmes configurations qui reviennent après cinquante-neuf ans, l'erreur des Tables va toujours en croissant.

Ces observations conduisent Halley à introduire un terme séculaire quadratique dans les longitudes moyennes de Jupiter et Saturne. Ces Tables de Halley feront autorité pendant plusieurs décennies, et seront reproduites sous diverses formes. En particulier, par l'Académie Royale de Prusse (1776) (Fig. 1, 2) pendant la période où Lagrange est à Berlin.

Ces irrégularités apparentes des mouvements de Jupiter et Saturne vont constituer l'un des grands problèmes de la science du XVIII ème siècle car il s'agissait de savoir si la loi de Newton rend bien compte du mouvement des planètes, et aussi de statuer sur la stabilité du Système solaire. Ceci va conduire l'Académie des Sciences de Paris à proposer des prix pour la résolution de ce problème, que L. Euler remporta par deux fois, en 1748 et 1752. Dans ce dernier mémoire (Euler, 1752), dont le mérite est de poser les fondations des méthodes de perturbations, Euler croit démontrer que la loi de Newton induit des mouvements séculaires dans les moyens mouvements

[2] De la Lande, Tables Astronomiques de M. Halley pour les planètes et les comètes, Paris, 1759

136 *Tables planétaires.*

Tables

Table II.
Mouvements moyens de Saturne pendant les Années Juliennes.

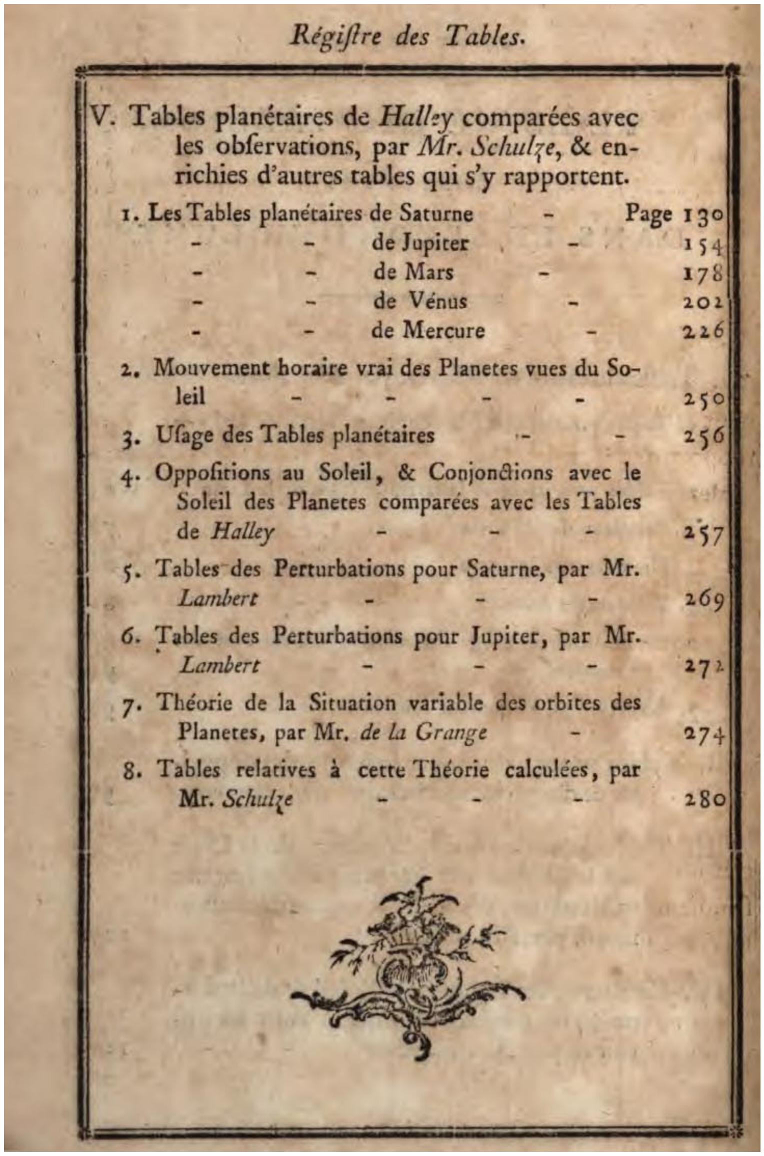
Années	Longitude de ♄. S. D. M. S	Équat. secul. D. M.	Aphélie S. D. M. S.	Anomalie moyenne S. D. M. S.	Nœud S. D. M. S.	Argument de Latitude. S. D. M. S.
1	0 12 13 21	0 0	0 0 1 20	0 12 12 1	0 0 0 18	0 12 13 3
2	0 24 26 43	0 0	0 0 2 40	0 24 24 3	0 0 0 36	0 24 26 7
3	1 6 40 4	0 0	0 0 4 0	1 6 36 4	0 0 0 54	1 6 39 10
B. 4	1 18 55 26	0 0	0 0 5 20	1 18 50 6	0 0 1 12	1 18 54 14
5	2 1 8 48	0 0	0 0 6 40	2 1 2 8	0 0 1 30	2 1 7 18
6	2 13 22 9	0 0	0 0 8 0	2 13 14 9	0 0 1 48	2 13 20 21
7	2 25 35 30	0 0	0 0 9 20	2 25 26 10	0 0 2 6	2 25 33 24
B. 8	3 7 50 53	0 0	0 0 10 40	3 7 40 13	0 0 2 24	3 7 48 29
9	3 20 4 14	0 0	0 0 12 0	3 19 52 14	0 0 2 42	3 20 1 32
10	4 2 17 35	0 0	0 0 13 20	4 2 4 15	0 0 3 0	4 2 14 35
11	4 14 30 57	0 0	0 0 14 40	4 14 16 17	0 0 3 18	4 14 27 39
B. 12	4 26 46 19	0 0	0 0 16 0	4 26 30 19	0 0 3 36	4 26 42 43
13	5 8 59 41	0 0	0 0 17 20	5 8 42 21	0 0 3 54	5 8 55 47
14	5 21 13 2	0 0	0 0 18 40	5 20 54 22	0 0 4 12	5 21 8 50
15	6 3 26 23	0 0	0 0 20 0	6 3 6 23	0 0 4 30	6 3 21 53
B. 16	6 15 41 46	0 0	0 0 21 20	6 15 20 26	0 0 4 48	6 15 36 58
17	6 27 55 7	0 0	0 0 22 40	6 27 32 27	0 0 5 6	6 27 50 1
18	7 10 8 28	0 0	0 0 24 0	7 9 44 28	0 0 5 24	7 10 3 4
19	7 22 21 50	0 0,1	0 0 25 20	7 21 56 30	0 0 5 42	7 22 16 8
B. 20	8 4 37 12	0 0,1	0 0 26 40	8 4 10 32	0 0 6 0	8 4 31 12
40	4 9 14 24	0 0,2	0 0 53 20	4 8 21 4	0 0 12 0	4 9 2 24
60	0 13 51 36	0 0,5	0 1 20 0	0 12 31 36	0 0 18 0	0 13 33 36
80	8 18 28 48	0 0,9	0 1 46 40	8 16 42 8	0 0 24 0	8 18 4 48
100	4 23 6 0	0 1,4	0 2 13 20	4 20 52 40	0 0 30 0	4 22 36 0
200	9 16 12 0	0 5,6	0 4 26 40	9 11 45 20	0 1 0 0	9 15 12 0
300	2 9 18 0	0 12,5	0 6 40 0	2 2 38 0	0 1 30 0	2 7 48 0
400	7 2 24 0	0 22,2	0 8 53 20	6 23 30 40	0 2 0 0	7 0 24 0
500	11 25 30 0	0 34,8	0 11 6 40	11 14 23 20	0 2 30 0	11 23 0 0
600	4 18 36 0	0 50,0	0 13 20 0	4 5 16 0	0 3 0 0	4 15 36 0
70	9 11 42 0	1 8,1	0 15 33 20	8 26 8 40	0 3 30 0	9 8 12 0
800	2 4 48 0	1 29,0	0 17 46 40	1 17 1 20	0 4 0 0	2 0 48 0
900	6 27 54 0	1 52,6	0 20 0 0	6 7 54 0	0 4 30 0	6 23 24 0
1000	11 21 0 0	2 19,0	0 22 13 20	10 28 46 40	0 5 0 0	11 16 0 0
2000	11 12 0 0	9 16,1	1 14 26 40	9 27 33 20	0 10 0 0	11 2 0 0
3000	11 3 0 0	20 51,1	2 6 40 0	8 26 20 0	0 15 0 0	10 18 0 0
4000	10 24 0 0	37 4,4	2 28 53 20	7 25 6 40	0 20 0 0	10 4 0 0
5000	10 15 0 0	57 55,6	3 21 6 40	6 23 53 20	0 25 0 0	9 20 0 0
6000	10 6 0 0	83 24,4	4 13 20 0	5 22 40 0	1 0 0 0	9 6 0 0

FIG. 1 – Reproduction des Tables de Halley dans le *Recueil de Tables Astronomiques publié sous la direction de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse, Vol. II, 1776.*

de Jupiter et Saturne, variations qu'il trouve être de même signe, contrairement aux observations. En réalité, on sait maintenant que ce premier résultat d'Euler est faux.

1.2 Le mémoire de 1766

C'est encore cette question importante que Lagrange cherche à résoudre dans son mémoire de 1766 "Solution de différents problèmes de calcul intégral", qui paraîtront dans les mémoires de Turin.



Régiſtre des Tables.

FIG. 2 – Tables des matières du *Recueil de Tables Astronomiques publié sous la direction de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse, Vol. II, 1776.* On y voit figurer un mémoire de Lagrange qui résume les résultats de son Mémoire sur les nœuds et inclinaisons des planètes (1774-1778).

> je me bornerai à examiner ici, d'après les formules données ci-dessus, les inégalités des mouvements de Jupiter et Saturne qui font varier l'excentricité et la position de l'aphélie de ces deux planètes, aussi bien que l'inclinaison et le lieu du nœud de leur orbites, et qui produisent surtout une altération apparente dans leurs moyens mouvements, inégalités que les observations ont fait connaître depuis longtemps, mais que personne jusqu'ici n'a encore entrepris de déterminer avec toute l'exactitude qu'on peut exiger dans un sujet si important.

Autant dire que Lagrange ne croit pas aux résultats d'Euler. Et pourtant, le soin apporté par cette étude de Lagrange ne suffira pas non plus, car bien que les

TABLE DE LA VARIATION DES ÉLÉMENTS DE JUPITER ET DE SATURNE, SUIVANT LA THÉORIE.

	JUPITER.	SATURNE.
Variation de la plus grande équation du centre.	$+\ 7'',4254\, n$	$-\ 32'',6086\, n$
Variation de l'inclinaison à l'écliptique.	$-\ 1'',0030\, n$	$+\ 2'',7449\, n$
Mouvement moyen de l'aphélie par rapport aux étoiles fixes.	$+86'',6311\, n$	$+471'',8632\, n$
Inégalité croissante dans le mouvement de l'aphélie.	$+\ 0'',0262\, n^2$	$+\ 0'',1141\, n^2$
Mouvement moyen des nœuds par rapport aux étoiles fixes.	$+86'',1075\, n$	$-256'',4655\, n$
Inégalité croissante dans le mouvement des nœuds.	$+\ 0'',0513\, n^2$	$-\ 0'',0405\, n^2$
Inégalité croissante dans le mouvement en longitude.	$+\ 2'',7402\, n^2$	$-\ 14'',2218\, n^2$

FIG. 3 – Résultats de Lagrange (1766) pour le calcul des inégalités séculaires. Il trouve en particulier un terme quadratique de $2".7402n^2$ dans la longitude moyenne de Jupiter, et de $-14".2218n^2$ dans celle de Saturne, où n est le nombre de révolution de chaque planète.

résultats de Lagrange se rapprochent mieux des observations (il trouve bien que Jupiter accélère alors que Saturne ralentit (Fig.3)), ses calculs sont encore inexacts. Ce mémoire reste cependant important pour les nouvelles méthodes de résolutions des équations différentielles que Lagrange y introduit (voir à ce sujet le travail plus détaillé de F. Brechenmacher, 2007).

1.3 L'invariance des demi-grands axes

C'est finalement à Laplace, que reviendra la première démonstration de l'invariance séculaire des demi-grands axes des planètes, résultat qu'il publie dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris en 1776. Il dira à propos de l'inégalité séculaire des demi-grands axes :

> Elle ne paraît pas cependant avoir été déterminée avec toute la précision qu'exige son importance. M. Euler, dans sa seconde pièce sur les irrégularités de Jupiter et de Saturne, la trouve égale pour l'une et l'autre de ces planètes. Suivant M. de Lagrange, au contraire, dans le troisième Volume des *Mémoires de Turin*, elle est fort différente pour ces deux corps. ...j'ai lieu de croire, cependant, que la formule n'est pas encore exacte. Celle à laquelle je parviens est fort différente. ...en substituant ces valeurs dans la formule de l'équation séculaire, je l'ai trouvée absolument nulle ; d'où je conclus que l'altération du mouvement moyen de Jupiter, si elle existe, n'est point due à l'action de Saturne.

Ce résultat de Laplace est admirable, car il réussit là où les esprits les plus brillants du siècle, Euler et Lagrange, ont échoué, tout en construisant (avec d'Alembert) les éléments qui ont permis cette découverte. Le résultat de Laplace est d'autant plus frappant qu'il vient à l'encontre des observations, ce qui, il faut le souligner, n'avait pas non plus gêné Euler. Laplace ne remet cependant pas en cause la loi de gravitation de Newton, mais il faut alors trouver une autre cause pour ces irrégularités de Jupiter et Saturne. Heureusement, il y a un coupable tout trouvé, car à côté des planètes, dont le mouvement apparaît régulier et bien ordonné, existent d'autres corps, les comètes, dont on avait déjà remarqué les trajectoires très diverses. Comme alors on ne connaissait pas leurs masses, on pouvait invoquer leur attraction pour expliquer toute irrégularité du Système solaire.

> Il résulte de la théorie précédente que ces variations ne peuvent être attribuées à l'action mutuelle de ces deux planètes ; mais, si l'on considère le grand nombre de comètes qui se meuvent autour du Soleil, si l'on fait ensuite réflexion qu'il est très possible que quelques-unes d'entre elles aient passé assez près de Jupiter et de Saturne pour altérer leurs mouvements, ...il serait donc fort à désirer que le nombre des comètes, leurs masses et leurs mouvements fussent assez connus pour que l'on pût déterminer l'effet de leur action sur les planètes ; (Laplace, 1776a).

L'importance de l'analyse des trajectoires des comètes sera aussi fondamentale pour l'intérêt que portera Laplace à l'étude des probabilités, car il s'agit bien de savoir si les trajectoires des comètes sont le résultat du hasard (Laplace, 1776b).

1.4 Inclinaisons et excentricités

Laplace avait présenté ses résultats sur l'invariance des demi-grands axes à l'Académie en 1773. L'année suivante, en octobre 1774, Lagrange, alors à Berlin, soumet à l'Académie des Sciences de Paris un nouveau mémoire sur les mouvements séculaires des inclinaisons et des nœuds des planètes. C'est dans ce mémoire qu'apparaît pour la première fois les équations différentielles linéaires à coefficients constants qui représentent au premier ordre les mouvement moyennisés des orbites planétaires.

> Ce Mémoire contient une nouvelle Théorie des mouvements des nœuds et des variations des inclinaisons des orbites des planètes, et l'application de cette Théorie à l'orbite de chacune des six planètes principales. On y trouvera des formules générales, par lesquelles on pourra déterminer dans un temps quelconque la position absolue de ces orbites, et connaître par conséquent les véritables lois des changements auxquels les plans de ces orbites sont sujets.

Un des éléments important dans la résolution de ces équations est l'utilisation des variables cartésiennes

$$s = \tan i \sin \Omega \; ; \qquad u = \tan i \cos \Omega \; , \tag{1}$$

où i est l'inclinaison, et Ω la longitude du nœud. A peu de chose près, ces variables sont celles qui sont encore utilisées aujourd'hui pour l'étude des mouvements planétaires. Lagrange donne ici pour la première fois une solution quasipériodique pour le mouvement des éléments du plan des orbites planétaires sous une forme que l'on peut écrire maintenant de manière plus synthétique grâce à la notation complexe

$$u(t) + \sqrt{-1}s(t) = \sum_{k=1}^{6} \beta_k \exp(\sqrt{-1}s_k t) \ . \tag{2}$$

Les s_k sont les valeurs propres de la matrice à coefficients constants du Système séculaire linéaire. Bien entendu, Lagrange n'utilise pas le formalisme matriciel qui ne sera mis en place que bien plus tard (voir Brechenmacher, 2007), mais il doit quand même effectuer de manière équivalente le calcul des valeurs propres d'une matrice 6×6. Pour ce faire, il procèdera par itération, en commençant par la résolution du système Soleil-Jupiter-Saturne. Il est impressionnant de constater que malgré les incertitudes sur les valeurs des masses des planètes intérieures (Mercure, Vénus et Mars) [3], Lagrange obtient des valeurs des fréquences fondamentales du système séculaire (s_k) très voisines des valeurs actuelles (Tab.1).

k	Lagrange (1774)	Laskar *et al.*, 2004
s_1	5.980	5.59
s_2	6.311	7.05
s_3	19.798	18.850
s_4	18.308	17.755
s_5	0	0
s_6	25.337	26.347

TAB. 1 – Fréquences séculaires s_k des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites planétaires. Les valeurs de Lagrange (1774) et les valeurs modernes (Laskar *et al.*, 2004) sont données en secondes d'arc par an. On pourra s'étonner que les valeurs modernes donnent moins de chiffres significatifs que celles de Lagrange, mais la diffusion chaotique du Système solaire entraîne une variation sensible de ces fréquences, rendant vain une détermination précise de celles-ci. La fréquence séculaire nulle s_5 résulte de l'invariance du moment cinétique.

Le mémoire de Lagrange que Laplace reçoit à l'Académie à Paris fera grande impression sur ce dernier qui avait temporairement laissé de côté ses propres études sur le mouvement séculaire des orbites planétaires. Il comprend tout de suite l'originalité et l'intérêt de ce travail et soumet sans tarder un nouveau mémoire à l'Académie, sur l'application de la méthode de Lagrange au mouvement des excentricités et des aphélies des orbites planétaires (Laplace, 1775).

> Je m'étais proposé depuis longtemps de les intégrer ; mais le peu d'utilité de ce calcul pour les besoins de l'Astronomie, joint aux difficultés qu'il présentait, m'avait fait abandonner cette idée, et j'avoue que je ne l'aurais pas reprise, sans la lecture d'une excellent mémoire *Sur les inégalités séculaires du mouvement des nœuds et de l'inclinaison des orbites des planètes*, que M. de Lagrange vient d'envoyer à l'Académie, et qui paraîtra dans un des volumes suivants. *(Laplace, œuvres t VIII, p.355)*

Ce qui est surprenant, c'est que le mémoire de Laplace, soumis en décembre 1774, paraît très rapidement, en 1775, avec les mémoires de l'Académie de 1772, alors que le mémoire original de Lagrange devra attendre 1778 pour paraître avec

[3] Mercure et Vénus ne possèdent pas de satellites permettant une bonne détermination de la masses de la planète par application de la troisième loi de Kepler. Les satellites de Mars Phobos et Deimos ne seront découverts que bien plus tard, en 1877.

les autres mémoires de l'année 1774. L'application aux excentricités et aphélie est en fait assez immédiate, en utilisant les variables

$$l = e\cos\varpi \ ; \qquad h = e\sin\varpi \ . \tag{3}$$

> J'ai de plus cherché si l'on ne pourrait pas déterminer d'une manière analogue les inégalités séculaires de l'excentricité et du mouvement de l'aphélie, et j'y suis heureusement parvenu ; en sorte que je puis déterminer, non seulement les inégalités séculaires du mouvement des nœuds et de l'inclinaison des orbites des planètes, les seules que M. de Lagrange ait considérées, mais encore celles de l'excentricité et du mouvement des aphélies, et comme j'ai fait valoir que les inégalités du moyen mouvement et de la distance moyenne sont nulles, on aura ainsi une théorie complète et rigoureuse de toutes les inégalités séculaires des orbites des planètes. *(Laplace, œuvres t VIII, p.355)*

On peut s'étonner que ce mémoire de Laplace paraisse avant celui de Lagrange, et Laplace lui-même se sent obligé de rajouter en note

> J'aurai dû naturellement attendre que les recherches de M. de Lagrange fussent publiées avant que de donner les miennes ; mais, venant de faire paraître dans les *Savants étrangers*, année 1773, un Mémoire sur cette matière, j'ai cru pouvoir communiquer ici aux géomètres, en forme de supplément, ce qui lui manquait encore pour être complet, en rendant d'ailleurs au Mémoire de M. de Lagrange toute la justice qu'il mérite ; je m'y suis d'autant plus volontiers déterminé, que j'espère qu'ils me sauront gré de leur présenter d'avance l'esquisse de cet excellent Ouvrage. *(Laplace, œuvres t VIII, p.355)*

Laplace envoie son Mémoire à Lagrange qui lui retourne une longue lettre de Berlin le 10 avril 1775 :

> Monsieur et très illustre Confrère, j'ai reçu vos Mémoires, et je vous suis obligé de m'avoir anticipé le plaisir de les lire. Je me hâte de vous en remercier, et de vous marquer la satisfaction que leur lecture m'a donnée. Ce qui m'a le plus intéressé, ce sont vos recherches sur les inégalités séculaires. Je m'étais proposé depuis longtemps de reprendre mon ancien travail sur la théorie de Jupiter et de Saturne, de le pousser plus loin et de l'appliquer aux autres planètes ; j'avais même dessein d'envoyer à l'Académie un deuxième Mémoire sur les inégalités séculaires du mouvement de l'aphélie et de l'excentricité des planètes, dans lequel cette matière serait traitée d'une manière analogue à celle dont j'ai déterminé les inégalités du mouvement du nœud et des inclinaisons, et j'en avais déjà préparé les matériaux ; mais, comme je vois que vous avez entrepris vous-même cette recherche, j'y renonce volontiers, et je vous sais même très bon gré de me dispenser de ce travail, persuadé que les sciences ne pourront qu'y gagner beaucoup.

Lagrange précise donc à Laplace qu'il avait bien compris lui aussi que le problème des excentricités pouvait se traiter de la même manière, et puisque Laplace s'occupe maintenant de cette question il propose de lui abandonner ce sujet. En réalité, cette "sorte de promesse" ne durera pas, et il renvoie à d'Alembert une lettre datée du 29 mai 1775 qui montre qu'il n'a pas résisté à l'envie de continuer ses recherches sur ce sujet passionnant.

> Je suis près à donner une théorie complète des variations des éléments des planètes en vertu de leur action mutuelle. Ce que M. de la Place a fait sur cette matière m'a beaucoup plu, et je me flatte qu'il ne me saura pas mauvais gré de ne pas tenir l'espèce de promesse que j'avais faite de la lui abandonner entièrement ; je n'ai pas pu résister à l'envie de m'en occuper de nouveau, mais je ne suis pas moins charmé qu'il y travaille aussi de son côté ; je suis même fort empressé de lire ses recherches ultérieures sur ce sujet, mais je le prie de ne m'en rien communiquer en manuscrit et de ne me les envoyer qu'imprimées ; je vous prie de bien vouloir le lui dire, en lui faisant en même temps mille compliments de ma part.

En effet, Lagrange va continuer ces travaux, et les publier dans trois mémoires de 1781, 1782, 1783a,b, et 1784 dans lesquels il fournira la première solution complète du mouvement des six planètes principales. Peut-être échaudé par la soumission de son article de 1774 à l'Académie des Sciences de Paris, il préfèrera cette fois-ci publier ses travaux dans les Mémoires de l'Académie de Berlin.

1.5 La grande inégalité de Jupiter et Saturne[4]

Laplace avait démontré l'invariance des mouvements séculaires des demi-grands axes des planètes, en considérant les premiers termes du développement de leurs perturbations moyennes, mais restait le problème de l'accord avec les observations. Il reprend ces travaux dans le cadre de sa théorie de Jupiter et Saturne. Un premier élément met Laplace sur la bonne voie : c'est l'observation de la conservation de l'énergie dans le système Soleil-Jupiter-Saturne. Si la loi de Newton est correcte, la conservation de l'énergie du système implique que lorsque l'un des moyens mouvements augmente, l'autre doit diminuer, ce qui est bien observé. En négligeant les termes d'ordre 2 par rapport aux masses, il trouve que la quantité

$$\frac{m_J}{a_J} + \frac{m_S}{a_S} \tag{4}$$

doit rester constante, ce qui donne alors, avec la loi de Kepler ($n^2a^3 = Cte$) :

$$\frac{dn_S}{dn_J} = -\frac{m_J}{m_S}\sqrt{\frac{a_J}{a_S}} \tag{5}$$

où pour chaque planète Jupiter (J) ou Saturne (S), m désigne la masse, a le demi-grand axe, et n le moyen mouvement. Avec les données de l'époque (Tab.2), on trouve $dn_S/dn_J = -2.32$, ce que Laplace traduit par "Le retardement de Saturne doit être à l'accélération de Jupiter, a peu près, comme 7 est à 3". En utilisant les valeurs admises par Halley par comparaison aux observations, on obtient $dn_S/dn_J = -2.42$, ce qui permet à Laplace de penser avec une bonne certitude que "les variations observées dans les mouvements de Jupiter et Saturne sont un effet de leur action mutuelle". La loi de Newton ne semble pas mise en cause, mais il faut trouver la raison de ces variations à partir des équations de Newton elles-mêmes. Comme Laplace vient de montrer qu'il n'existe pas de termes séculaires dans les équations

[4] Voir aussi : Laskar, J. 1992, La stabilité du Système Solaire, in Chaos et Déterminisme, Dahan Dalmedico *et al.*, eds, Seuil, Paris

du premier ordre des demi-grands axes, il en déduit que ces variations du moyen mouvement des planètes provient sans doute d'un terme à courte période (terme dont la fréquence est une combinaison entière des moyens mouvements de Jupiter et de Saturne) qui serait de période suffisamment longue pour ressembler à un terme séculaire. Un bon candidat pour cela est le terme associé à la combinaison des longitudes $2\lambda_J - 5\lambda_S$, qui possède une période d'environ 900 ans.

planète	$1/m$	a (UA)	n ("/365j)
Jupiter	1067.195	5.20098	109182
Saturne	3358.40	9.54007	43966.5

Tab. 2 – Valeurs des paramètres des planètes Jupiter et Saturne chez Laplace (Laplace, 1785).

Cette recherche amène Laplace à entreprendre la construction d'une théorie plus complète du mouvement du couple Jupiter-Saturne. Après de longs calculs, car pour obtenir ces termes il est nécessaire de développer les perturbations à un degré élevé par rapport aux excentricités de Jupiter et Saturne, il obtient les formules suivantes (réduites ici à leurs termes dominants) pour les moyens mouvements de Jupiter et Saturne

$$\begin{aligned} \lambda_J &= n_J t + \epsilon_J + 20' \qquad \sin(5n_S t - 2n_S t + 49°8'40'') \\ \lambda_S &= n_S t + \epsilon_S + 46'50'' \sin(5n_S t - 2n_S t + 49°8'40'') \end{aligned} \tag{6}$$

ϵ_J et ϵ_S étant les conditions initiales pour la date 1700 après JC. Laplace corrige alors les valeurs des moyens mouvements de Jupiter et Saturne n_J et n_S par rapport aux tables de Halley. Il est alors en mesure de comparer sa nouvelle théorie, sans termes séculaires dans les moyens mouvements (ou ce qui est équivalent, sans termes quadratiques dans la longitude moyenne) aux observations modernes et anciennes. Les écarts en longitude de sa théorie avec les observations modernes (de 1582 à 1786) sont tous inférieurs à $2'$ alors que les différences avec les tables Halley atteignent plus de $20'$. Il compare aussi sa théorie avec les observations Chaldéennes de Saturne en -228 et de Jupiter en -240 transmises par Ptolémée dans *l'Almageste*. Ces observations sont de qualité particulièrement bonne, car elles repèrent les planètes précisément par rapport à des étoiles connues. Laplace trouve un écart avec ses formules de seulement $55''$ pour la première, et $5''$ pour la seconde.

La nouvelle théorie du couple Jupiter-Saturne que Laplace vient d'achever est donc maintenant en parfait accord avec les observations de -240 à 1715, sans avoir recours à un terme séculaire empirique dans les moyens mouvements. Toute la théorie découle uniquement de la loi de Newton, et Laplace y voit "une nouvelle preuve de l'admirable théorie de la pesanteur universelle". Il obtient aussi un résultat annexe important, à savoir que la masse des comètes est certainement très petite, sinon leurs perturbations auraient dérangé le mouvement de Saturne.

A la suite de ces travaux, les termes séculaires des moyens mouvements vont disparaître définitivement des Tables, et dans la deuxième édition de son "Abrégé d'Astronomie", De la Lande (1795) réduira le chapitre sur les équations séculaires à un simple paragraphe, en rappelant que les calculs de Laplace sur la grande inégalité de Jupiter et Saturne "font disparaître l'accélération de l'un (Jupiter) et le retardement de l'autre (Saturne) ; leur effet est seulement de faire paraître les révolutions plus ou moins longues pendant neuf siècles."

1.6 Retour sur les demi-grands axes

La démonstration de Laplace de l'invariance séculaire des demi-grands axes des planètes s'appliquait au développement au degré deux en excentricité et inclinaisons du potentiel perturbateur des planètes. Lagrange reviens en 1776 sur ce problème en utilisant sa méthode de variations des constantes, ce qui lui permet de refaire la démonstration, sans développements en excentricité, et donc valable pour toutes excentricités. Sa démonstration est aussi particulièrement simple, et très proche de la démonstration actuelle.

Lagrange reviendra encore sur ce problème en 1808 après que Poisson ait présenté son fameux Mémoire de près de 80 pages (Poisson, 1808), où il montre que l'invariance des demi-grands axes des planètes subsiste encore au second ordre des masses.

Lagrange est alors à Paris, Membre de l'Institut, où il a été appelé par Laplace en 1787, comme “Pensionaire vétéran de l'Académie des Sciences”. Dans ce mémoire de 1808, Lagrange montre qu'en se rapportant au barycentre du Système solaire au lieu d'utiliser comme auparavant des coordonnées héliocentriques, il parvient à donner une forme plus symétrique aux équations et à simplifier considérablement la démonstration de Poisson.

Il obtient en effet les équations différentielles du mouvement à partir d'une seule fonction, et c'est le début du formalisme Lagrangien de variations des constantes qui vient déjà montrer toute sa puissance dans ce problème difficile. Il débouchera sur la méthode générale de Lagrange, décrit dans le “ Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique” (Lagrange, 1808, 1809). Ce problème de la stabilité du Système solaire et du calcul des termes séculaires observés par les astronmes a donc été fondamental dans le dévelopement de la science du XVIII ème siècle et de la mécanique et des méthodes perturbatives.

1.7 La “preuve” de stabilité de Lagrange et Laplace et la question de Le Verrier

A la suite des travaux de Lagrange et Laplace, la stabilité du Système solaire semble donc acquise. Les grands axes des orbites ne possèdent pas de variations à long terme, et leurs excentricités et inclinaisons ne présentent que de petites variations qui ne permettent pas aux orbites de se croiser ni aux planètes d'entrer en collision. Il convient de souligner cependant que les solutions de Lagrange et Laplace sont très différentes des ellipses de Kepler : les orbites ne sont plus fixe. Elles sont soumises à un double mouvement de precession avec des périodes allant de 45 000 ans à quelques millions d'années : précession des périhélies, qui est la rotation lente de l'orbite dans son plan, et précession des nœuds, qui est la rotation du plan de l'orbite espace.

Lagrange et Laplace ont écrit la première “preuve” de la stabilité du Système solaire. Mais comme le soulignera Poincaré (1898) dans un article de vulgarisation sur la stabilité du Système solaire

> Les personnes qui s'intéressent aux progrès de la Mécanique céleste, ... , doivent éprouver quelque étonnement en voyant combien de fois on a démontré la stabilité du système solaire.
> Lagrange l'a établie d'abord, Poisson l'a démontrée de nouveau, d'autres démonstrations sont venues depuis, d'autres viendront encore. Les démonstrations anciennes étaient-elles insuffisantes, ou sont-ce les nouvelles qui sont superflues ?
> L'étonnement de ces personnes redoublerait sans doute, si on leur disait qu'un jour peut-être un mathématicien fera voir, par un raisonnement rigoureux, que le système planétaire est instable.

En réalité, les travaux de Lagrange et Laplace ne concernent que l'approximation linéaire du mouvement moyen des planètes. Dans le langage moderne, on peut dire qu'ils ont démontré que l'origine (correspondant aux mouvements circulaires plans) est un point fixe elliptique dans l'espace des phases séculaire qui est obtenu après moyennisation d'ordre un par rapport aux longitudes moyennes. Plus tard, Leverrier (1856), célèbre pour sa découverte en 1846 de la planète Neptune par le calcul, à partir des observations des irrégularités du mouvement d'Uranus, a repris les calculs de Lagrange et Laplace et a examiné les effets des termes d'ordre supérieur dans les séries de perturbations. Il montre que ces termes produisent des corrections significatives et que les calculs de Laplace et Lagrange ne pouvait pas être utilisé pour une durée indéterminée. Le Verrier (1856) pose la question de l'existence de petits diviseurs dans le système des planètes intérieures ce qui est d'autant plus important que certaines des masses sont très imprécises, et qu'un changement de masse admissible peut rendre un diviseur très petit

> Ces termes acquièrent par l'intégration de très petits diviseurs ; et ainsi il en résulte, dans les intégrales, des termes dus à la seconde approximation, et dont les coefficients surpassent ceux de la première approximation. Si l'on pouvait répondre de la valeur absolue de ces petits diviseurs, la conclusion serait simple : la méthode des approximations successives devrait être rejetée

L'indétermination des masses des planètes intérieures ne permet pas à Le Verrier de trancher et il ne peut alors que lancer un appel aux mathématiciens pour résoudre le problème

> II paraît donc impossible, par la méthode des approximations successives, de prononcer si, en vertu des termes de la seconde approximation, le système composé de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, jouira d'une stabilité indéfinie ; et l'on doit désirer que les géomètres, par l' intégration des équations différentielles, donnent les moyens de lever cette difficulté, qui peut très bien ne tenir qu'à la forme

1.8 Poincaré : La réponse du géomètre

Mais Poincaré (1892 - 99) donnera une réponse négative à la question de Le Verrier. Pour ce faire, il repense entièrement les méthodes de la mécanique céleste à la suite des travaux de Jacobi et de Hamilton. Poincaré montre qu'il n'est pas possible d'intégrer les équations du mouvement des trois corps soumis à leur interaction gravitationnelle mutuelle, et qu'il n'est pas non plus possible de trouver une solution analytique représentant le mouvement des planètes valable sur une intervalle de temps infini, puisque les séries de perturbation utilisée par les astronomes pour calculer le mouvement des planètes ne sont pas convergentes sur un domaine ouvert de conditions initiales.

Poincaré montre donc que les séries des astronomes sont en général divergentes. Cependant, il estime les travaux des astronomes de son époque, et signale aussi que ces séries divergentes peuvent quand même servir d'approximation pour le mouvement des planètes pendant un certain temps, qui peut être long, mais pas infini. Poincaré ne semble d'ailleurs pas penser que ses résultats puissent avoir une grande importance pratique, si ce n'est justement pour l'étude de la stabilité du système solaire

> Les termes de ces séries, en effet, décroissent d'abord très rapidement et se mettent ensuite à croître ; mais, comme les astronomes s' arrêtent aux premiers tennes de la série et bien avant que ces termes aient cessé de décroître, l'approximation est suffisante pour les besoins de la pratique. La divergence de ces développements n'aurait d' inconvénients que si l'on voulait s'en servir pour établir rigoureusement certains résultats, par exemple la stabilité du système solaire.

Il faut noter que Poincaré entend ici la stabilité sur un temps infini, ce qui est très différent de la stabilité pratique du Système solaire, qui n'a de sens que sur un intervalle de temps comparable à sa durée de vie. Le Verrier avait reformulé la question de la stabilité du système solaire en signalant qu'il fallait tenir compte des termes de degré plus élevés que ceux considérés par Laplace et Lagrange ; Poincaré est encore plus exigeant, en réclamant la convergence des séries :

> Ce résultat aurait été envisagé par Laplace et Lagrange comme établissant complètement la stabilité du système solaire. Nous sommes plus difficiles aujourd'hui parce que la convergence des développements n'est pas démontrée ; ce résultat n'en est pas moins important.

Poincaré a montré la divergence des séries utilisées par les astronomes dans leurs calculs de perturbations. Selon son habitude, il étudie une variété bien plus importante de séries de perturbations, mais qui ne semblent pas d'un intérêt immédiat pour les astronomes, car elles imposent de modifier les conditions initiales des planètes au cours des calculs. Pourtant, Poincaré n'est pas aussi assuré de la divergence de ce type de séries :

> Les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport n_1/n_2 soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport n_1/n_2 est assujetti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ? Les raisonnements de ce chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable.

Pourtant, un demi-siècle plus tard, dans la lignée des travaux de Poincaré, le mathématicien russe A. N. Kolmogorov montre que ce type de séries de perturbation existe bien.

1.9 Le retour de la stabilité

Kolmogorov (1954) analyse à nouveau ce problème de convergence des séries de perturbations de la mécanique céleste et démontre que pour un système hamiltonien perturbé non dégénéré, à côté des solutions non régulières décrites par Poincaré, il existe encore des trajectoires quasi-périodiques régulières remplissant des tores dans l'espace des phases. Ce résultat n'est pas en contradiction avec le résultat de non intégrabilité de Poincaré, car ces tores, paramétrés par les variables d'actions, sont isolés. Ce résultat a été complété par Arnold (1963a) qui a démontré que, pour une perturbation suffisamment petite, l'ensemble des tores invariants feuilletées par des trajectoires quasi-périodique est de mesure strictement positive, mesure qui tend vers l'unité quand la perturbation tend vers zéro. Moser (1962) a établi le même genre de résultats pour des conditions moins fortes qui n'exigent pas l'analyticité du Hamiltonien. Ces théorèmes sont appelés de manière générique théorèmes KAM, et ont été utilisés dans divers domaines. Malheureusement, ils ne s'appliquent pas directement au problème planétaire qui présente une dégénérescence propre (Le Hamiltonien non perturbé ne dépend que des demi grands axes, et non des autres variables d'action (liées à l'excentricité et l'inclinaison). Cela conduit Arnold à étendre la preuve de l'existence de tores invariants, en tenant compte de cette phénomène de dégénérescence. Il a ensuite appliqué son théorème explicitement à un système planétaire plan à deux planètes, pour un rapport de demi-grands axes proche de zéro, en démontrant alors l'existence de trajectoires quasipériodiques pour des valeurs suffisamment petites des masses planétaires et les excentricités (Arnold 1963b). Ce résultat a été ultérieurement étendu à des systèmes planétaires spatiaux à deux planètes (Robutel, 1995). Plus récemment, Féjoz et Herman (2004) ont montré l'existence de tores d'orbites quasipériodiques dans un système général de N planètes, mais ce résultat nécessite encore des masses planétaires extrêmement faibles.

Les résultats d'Arnold ont suscité de nombreuses discussions, en effet, comme les tores KAM quasipériodiques sont isolés, une variation infiniment petite des conditions initiales vient transformer une solution stable en solution chaotique, instable. En outre, comme le système planétaire comporte plus de deux degrés de liberté, aucun des tores KAM ne sépare l'espace des phases, en laissant la possibilité pour les trajectoires chaotiques de parcourir de grandes distances dans l'espace des phases. C'est le phénomène de diffusion mis en évidence par Arnold.

En fait, des résultats ultérieurs ont montré que dans le voisinage proche d'un tore régulier KAM, la diffusion des solutions est très lente (Nekhoroshev, 1977, Giorgilli al, 1989, Lochak, 1993, Morbidelli et Giorgilli, 1995), et peut être négligeable pendant très longtemps, éventuellement aussi longtemps que l'âge de l'univers.

Finalement, bien que les masses des planètes réelles soient beaucoup trop grande pour que les résultats précédents puissent s'appliquer directement au Système solaire[5], il est généralement supposé que la portée de ces résultats mathématiques va beaucoup plus loin que leurs limites démontrées, et jusque très récemment il était généralement admis que le Système solaire était stable, “pour toute acceptation raisonnable de ce terme”.

Au cours des vingt dernières années, le problème de la stabilité du Système solaire a progressé considérablement, en grande partie grâce de l'aide fournie par les ordinateurs qui permettent des calculs analytiques extensifs et des intégrations

[5] L'application du théorème Nekhoroshev démontrant la stabilité en temps fini du Système solaire à été faite par Niederman (1996), mais demande des masses planétaires de l'ordre de 10^{-13} masse solaires.

numériques de modèles réalistes du Système solaire sur des durées qui sont maintenant équivalentes à son âge, mais aussi grâce à la compréhension de la dynamique sous-jacente, résultant du développement de la théorie des systèmes dynamiques depuis Poincaré.

2 Calculs numériques

Le mouvement des planètes du Système solaire dispose d'un statut très privilégié. En effet, il est l'un des problèmes de la physique les mieux modélisés, et son étude peut être pratiquement réduite à l'étude du comportement des solutions des équations gravitationnelles (équation de Newton complétées par les corrections relativistes), en considérant des masses ponctuelles, sauf dans le cas des interactions du système Terre-Lune. Les effets dissipatifs sont aussi très faibles, et même si on préfère tenir compte de la dissipation par effet de marée dans le système Terre-Lune pour avoir une solution aussi précise que possible pour le mouvement de la Terre (e.g. Laskar *et al.*, 2004), on peut négliger la perte de masse du Soleil.

La complexité mathématique de ce problème, malgré son apparente simplicité (surtout si on le limite aux interactions Newtoniennes entre des masses ponctuelles) est de taille, et a constitué un défi pour les mathématiciens et les astronomes depuis sa formulation il y a trois siècles. Depuis les travaux de Poincaré, il est également connu que l'analyse méthodes perturbatives qui ont été utilisées dans les calculs planétaires pendant près de deux siècles ne peut pas fournir de bonnes approximations des solutions sur un temps infini. En outre, comme indiqué ci-dessus des résultats de stabilité obtenus par Arnold (1963ab) ne ne s'applique pas aux systèmes planétaires réalistes.

Depuis l'introduction des ordinateurs, l'intégration numérique des équations planètaires est apparue comme un moyen simple de surmonter cette complexité des solutions, mais cette approche toujours été limitée jusqu'à présent par la technologie informatique.

Les premières intégrations numériques longues du Système solaire étaient limitées aux planètes extérieures, de Jupiter à Pluton (Cohen *et al.*, 1973, Kinoshita et Nakai, 1984). En effet, plus le mouvement orbital des planètes est rapide, plus il est difficile de les intégrer numériquement, car le pas d'intégration nécessaire diminue avec leur période. Par une méthode classique, pour intégrer l'orbite de Jupiter, un pas d'intégration de 40 jours suffira, alors q'un pas de 0.5 jours est nécessaire pour intégrer le mouvement de tout le Système solaire.

Les premières intégration du système des planètes extérieures effectuées sur 100 puis 210 Ma (Carpino al, 1987, Nobili al, 1989, Applegate *et al.*, 1986) ont essentiellement confirmé la stabilité du système des planètes extérieures, en retrouvant des orbites quasipériodiques similaires à celles de Lagrange ou de Le Verrier. Ce n'est que lorsque Sussman et Wisdom (1988) ont prolongé leurs calculs sur 875 Ma que les premiers signes d'instabilité dans le mouvement de Pluton sont apparus, avec un temps Lyapunov (l'inverse de l'exposant de Lyapounov) de 20 Ma. Mais comme la masse de Pluton (qui depuis a perdu son statut de "planète") est très faible, (1/130 000 000 masse solaire), cette instabilité ne se traduit pas par des instabilités macroscopiques dans le reste du Système solaire qui restait très stable dans ces études.

2.1 Chaos dans le Système solaire

Les intégrations numériques permettent d'obtenir des solutions très précises pour les trajectoires de planètes, mais sont limitées par le pas de temps court, nécessaire pour obtenir cette précision dans le cas du Système solaire complet, où il est nécessaire de tenir compte du mouvement de Mercure, et même de la Lune. Il convient de souligner que, jusqu'en 1991, la seule intégration numérique disponible d'un modèle réaliste de l'ensemble du Système solaire était l'intégration numérique du Jet Propulsion Laboratory DE102 (Newhall *et al.*, 1983), calculée sur seulement 44 siècles.

J'optais alors pour une approche différente, en utilisant les méthodes de perturbations, dans l'esprit des travaux de Lagrange, Laplace et Le Verrier. En effet, depuis ces travaux pionniers, le *Bureau des Longitudes*[6], a toujours été le lieu de développement des théories planétaires basées sur les séries de perturbation classiques (Brumberg et Chapront, 1973, Bretagnon, 1974, Duriez, 1979). Implicitement, ces études supposent que le mouvement des corps célestes est régulier et quasipériodique. Les méthodes utilisés sont essentiellement les mêmes que celles qui étaient utilisées par Le Verrier, avec l'aide supplémentaire de l'ordinateur pour les calculs symboliques. En effet, ces méthodes peuvent fournir des approximations très satisfaisante des solutions des planètes plus plusieurs milliers d'années, mais ils ne seront pas en mesure de donner des réponses aux question de la stabilité du Système solaire. Cette difficulté, qui est connue depuis Poincaré est l'une des raisons qui avait motivé les intégrations numériques directes des équations du mouvement.

Les résultats des théorèmes KAM laissaient entrevoir la possibilité que les solutions perturbatives classiques puissent être développées à l'aide du calcul formel sur ordinateur, pour trouver des solutions quasipériodiques du mouvement du Système solaire. Cependant, en cherchant à construire une telle solution, j'ai réalisé que l'existence de multiples résonances dans le systèmes des planètes intérieures rendait illusoire une telle approche (Laskar, 1984). Cette difficulté, m'a amené à procéder en deux étapes bien distinctes :

La première étape consiste dans la construction d'un système moyen, similaire aux systèmes étudiés par Lagrange et Laplace. Les équations ne représente alors plus le mouvement de la planète, mais la lente déformation de son orbite. Ce système d'équations, obtenu par moyennisation d'ordre deux par rapport aux angles rapides (les longitudes moyenne) grâce à des programmes dédiés de calcul formel, comprend environ 150000 termes, mais il peut être considéré comme un système simplifié, car ses fréquences principales sont maintenant les fréquences de précession de l'orbite des planètes, et non leur période orbitale. Le système complet peut donc être intégré numériquement avec un très grand pas d'environ 500 ans. Les contributions de la Lune et de la relativité générale sont ajoutés sans difficulté (Laskar, 1985, 1986).

La deuxième étape, à savoir l'intégration numérique du système moyen (ou séculaire), est alors très efficace et a pu être effectuée sur plus de 200 Ma en seulement quelques heures de calcul. Le principal résultat de cette intégration a été de révéler que tout le Système solaire, et plus particulièrement le Système solaire interne (Mercure, Vénus, Terre et Mars), est chaotique, avec un temps de Lyapounov de 5 millions d'années (Laskar, 1989). Une erreur de 15 mètres dans le position initiale de

[6]Le *Bureau des Longitudes* a été fondée le 7 messidor an III (25 juin 1795) afin de développer l'astronomie et la mécanique céleste. Ses membres fondateurs ont été Laplace, Lagrange, Lalande, Delambre, Méchain, Cassini, Bougainville, Borda, Buache, Caroché.

la Terre donne lieu à une erreur d'environ 150 mètres après 10 Ma, mais cette même erreur devient 150 millions de km après 100 Ma. Il est donc possible de construire des éphémérides précises sur une période de quelques dizaines de Ma (Laskar *et al.*, 2004), mais il devient pratiquement impossible de prédire le mouvement des planètes au delà de 100 millions d'années.

Lorsque ces résultats furent publiés, la seule comparaison possible était la comparaison avec les éphémérides DE102, sur seulement 44 siècles. Ceci permettait cependant d'être confiant sur les résultats, en comparant les dérivées des solution à l'origine (Laskar, 1986, 1990). A l'époque, il n'y avait aucune possibilité d'obtenir des résultats similaires par intégration numérique directe.

Grâce aux avancées rapide de l'informatique, seulement deux ans plus tard, Quinn *et al.*(1991) ont été en mesure de publier une intégration numérique de l'ensemble du Système solaire, avec effets de la relativité générale et de la Lune, sur 3 Ma dans le passé (complétée ultérieurement par une l'intégration de 3 Ma à +3 Ma). La comparaison avec la solution séculaire (Laskar, 1990) montre alors un très bon accord, et confirme l'existence de résonances séculaires le système solaire interne (Laskar al, 1992a). Plus tard, en utilisant un intégrateur symplectique qui leur permet d'utiliser un grand pas d'intégration de 7.2 jours, Sussman et Wisdom (1992) ont obtenu une intégration du Système solaire sur 100 Ma, qui a confirmé la valeur de l'exposant de Lyapouvov d'environ 1/5 Ma pour le Système solaire.

2.2 Mouvements planétaires sur plusieurs Ma

Les variations de excentricités et inclinaisons sont clairement visibles sur une quelques Ma (Fig. 4). Sur un million d'années, les solutions issues des méthodes de perturbations de Lagrange et Le Verrier donneraient une bonne estimation de ces variations qui sont essentiellement dues au couplage linéaire présent dans les équations séculaires. Sur plusieurs centaines de Ma, le comportement des solutions des planètes extérieures (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune) sont très similaire à celui des premiers Ma, et le mouvement des ces planètes semble être très régulière, ce qui a également été montré de façon très précise au moyen de l'analyse en fréquence (Laskar, 1990).

2.3 Mouvement planétaires sur plusieurs milliards d'années (Ga)

Une fois que l'on sait que le mouvement du Système solaire est chaotique, avec une divergence exponentielle des trajectoires qui multiplie par 10 l'erreur sur les positions initiales tous les 10 Ma, il devient illusoire de vouloir retracer, ou prédire le mouvement des planètes au delà de 100 Ma par le calcul d'une trajectoire unique. On peut cependant effectuer un tel calcul pour explorer l'espace des phases du système, à condition de considérer que la trajectoire calculée n'est qu'une trajectoire possible parmi d'autres après 100 Ma. Dans (Laskar, 1994), de tels calculs ont même été poussés sur plusieurs milliards d'années afin de mettre en évidence l'impact de la diffusion chaotique des orbites. Dans la figure 5, on ne représente plus l'excentricité des planètes, mais leur valeur maximale, calculée sur une tranche de 1 Ma. Si la trajectoire est quasipériodique, ou proche de quasipériodique, ce maximum décrira une droite horizontale, correspondant à la somme des modules des amplitudes des différents termes périodiques.

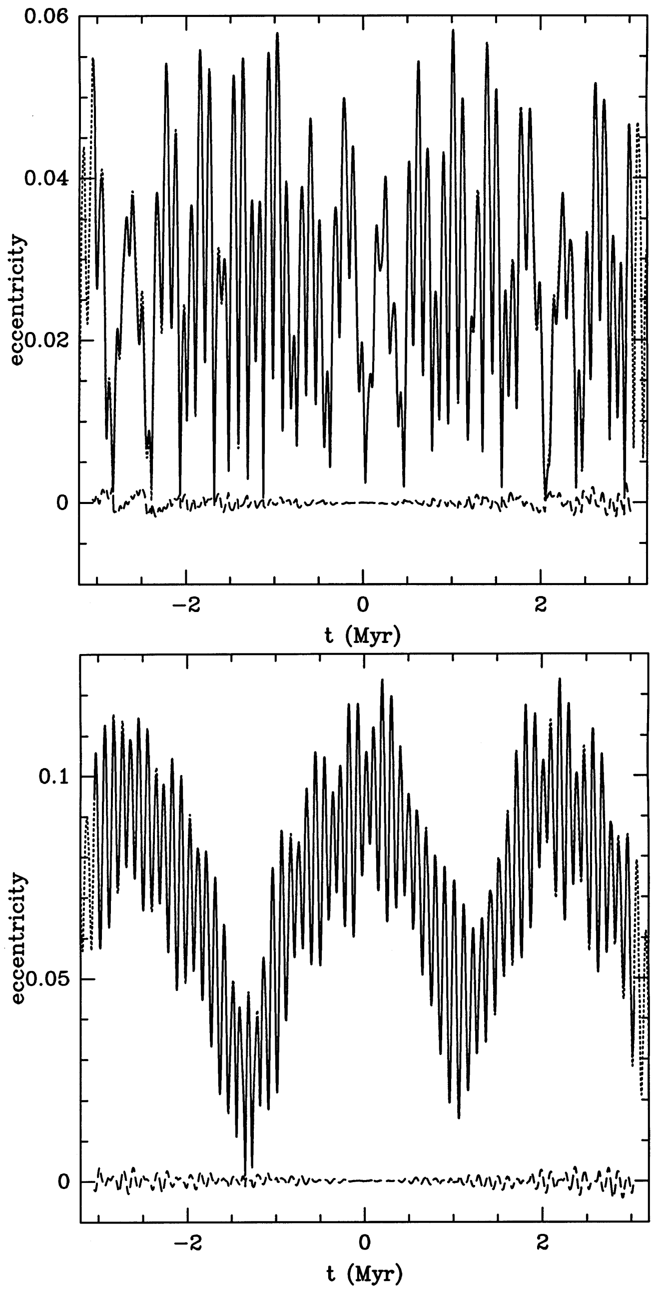


FIG. 4 – L'excentricité de la Terre (a) et Mars (b) de −3Ma à +3Ma. La ligne continue est la solution numérique QTD (Quinn *et al.*, 1991), et la ligne pointillée, la solution séculaire de (Laskar, 1990). Pour plus de clarté, la différence entre le deux solutions est également tracée (Laskar *et al.*, 1992).

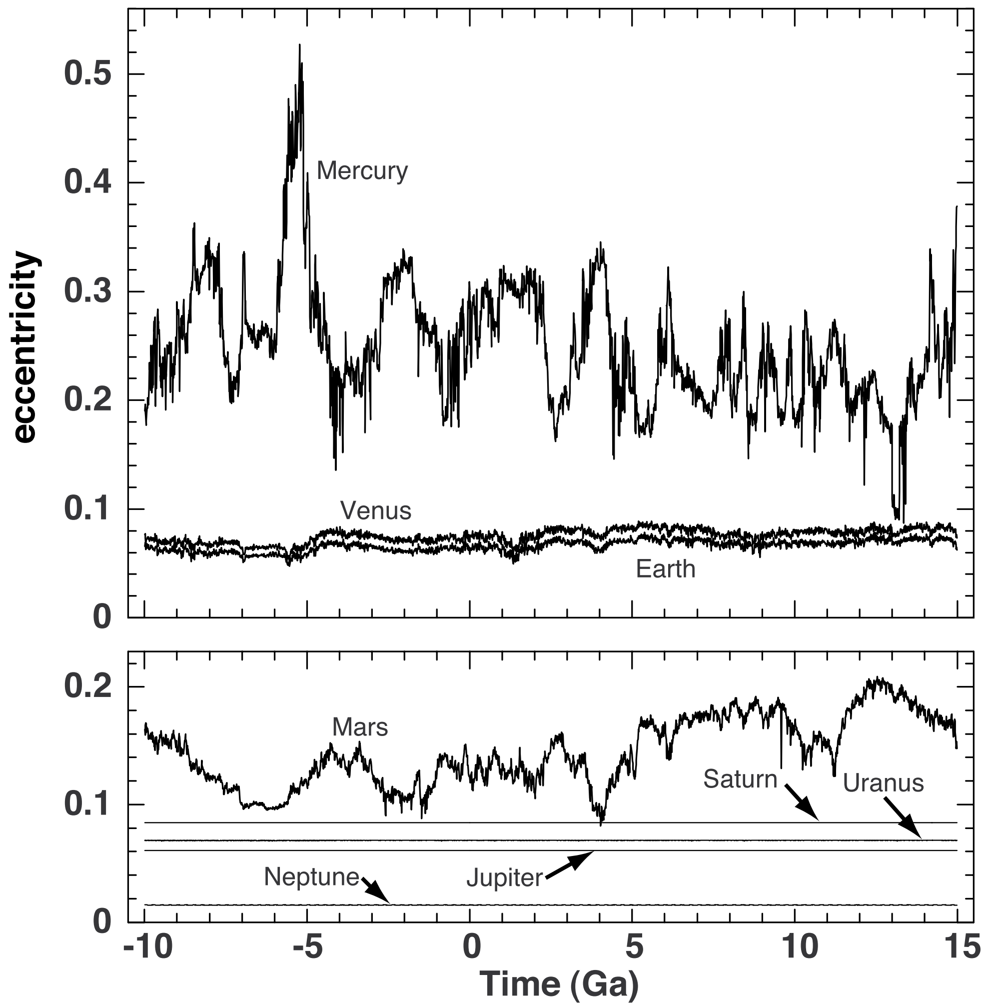


Fig. 5 – Intégration numérique des équations moyennisées du Système solaire de −10 à +15 Ga. Pour chaque planète, seul le maximum de l'excentricité atteint sur des tranches de 10 Ma est représenté. Le mouvement des grosses planètes est très proche d'un mouvement quasi périodique, et l'amplitude des oscillations de leurs éléments orbitaux ne varie pas. Au contraire, pour toutes les planètes intérieures, on assiste à des variations importantes des maximums atteints par l'excentricité et l'inclinaison, ce qui traduit la diffusion chaotique des orbites (Laskar, 1994).

De cette manière, on peut supprimer l'oscillation des excentricités résultant du couplage linéaire déjà présent dans les solutions de Lagrange ou Le Verrier. Les variations restantes de ce maximum qui apparaissent dans la figure 6 ne sont alors que les résultats de la diffusion chaotique des orbites. On constate que pour toutes les planètes extérieures (Jupiter, Saturne, Uranus, et Neptune), le maximum de l'excentricité est une droite horizontale, ce qui veut dire que le mouvement de ces planètes est très proche de quasipériodique. En revanche, pour toutes les planètes intérieures, on observe une diffusion chaotique de l'excentricité qui est significative. Elle est encore modérée pour Vénus et la Terre, importante pour Mars, dont l'orbite peut maintenant atteindre des excentricités de l'ordre de 0.2 (ce qui ne permet pas d'entrer en collision avec la Terre), et très forte pour Mercure qui atteint une excentricité de 0.5.

Cette valeur n'est cependant pas suffisante pour permettre une collision avec Vénus, ce qui nécessite une excentricité de plus de 0.7 pour Mercure. Mais il est bien entendu qu'au delà de 100 Ma, les trajectoires de la figure 6 ne représentent qu'une trajectoire possible du Système solaire, et une petite variation des conditions initiales modifiera les trajectoires de manière significative au delà de 100 Ma environ.

Pour savoir si les collisions entre Mercure et Vénus sont possible, il est donc nécessaire d'étudier les variations de la solution sous l'influence d'une petite variation des conditions initiales. Dans (Laskar, 1994) j'ai conduit cette étude, à partir du système séculaire, en montrant qu'il était effectivement possible de construire par morceaux une orbite de collision pour Mercure et Vénus.

En un premier temps, la trajectoire est intégrée sur 500 Ma. Puis, 4 trajectoires supplémentaires sont intégrée, correspondant à des variations de 15 mètres de la position atteinte à 500 Ma. On intègre à nouveau sur 500 Ma et on retient la trajectoire de plus grande excentricité de Mercure, arétée au voisinage du maximum. Cette opération, qui est ensuite répétée, aboutit à une excentricité de Mercure de plus de 0.9 en 13 étapes seulement, et en moins de 3.5 Ga, permettant les collisions avec Vénus. En revanche, les mêmes expériences conduites avec les trajectoires de Vénus, la Terre et Mars ne m'ont pas permis de construire des trajectoires de collisions pour ces planètes.

2.4 Diffusion chaotique dans le Système solaire

L'approche de 1994 possède cependant certaines limitations, car l'approximation obtenue par les équations moyennisées décroît en précision à mesure que l'on s'approche de la collision. Une étude utilisant les équations complètes, non moyennisées était donc nécessaire pour confirmer ce résultat. Malgré l'augmentation considérable de la puissance de calcul des ordinateurs depuis 1994, aucune étude complète de ce problème n'a été réalisée avant 2009.

En réalité, en raison du caractère chaotique des solutions, la seule approche possible est une étude statistique portant sur un grand nombre de solutions, avec des conditions initiales très voisines. Ceci montre la difficulté du problème quand on sait que jusqu'en 2009, aucune intégration directe du Système solaire n'avait encore été publiée en utilisant un modèle réaliste, comprenant l'effet de la Lune et de la relativité générale.

Pour aborder ce problème, j'ai en un premier temps effectué une telle étude statistique, à l'aide des équations moyennisées (dont l'intégration numérique est environ 2000 fois plus rapide que celle des équations complètes), pour 1000 solutions différentes, intégrées sur 5 Ga (Milliards d'années). Cette étude (Laskar, 2008) a permis de montrer que la probabilité d'aboutir à des excentricités très élevées pour Mercure (> 0.6) est de l'ordre de 1%. Dans cette même étude, j'ai pu aussi montrer que sur des durées de plus de 500 Ma, les distributions des excentricités et des inclinaisons des planètes internes (Mercure, Vénus, Terre, et Mars) suivaient des densités de probabilités de Rice, et se comportent comme des marches aléatoires avec une loi de diffusion empirique très simple.

Comme ces résultats différaient sensiblement des résultats publiées en 2002 par Ito et Tanikawa, qui avait intégré 5 orbites sur 5 Gyr pour un modèle purement Newtonien (non relativiste), j'ai aussi voulu tester les mêmes statistiques pour un système non relativiste, en pensant que ce système serait plus stable, comme celui de Ito et Tanikawa (2002) qui trouvaient pour Mercure une excentricité maximale de seulement 0.35 environ. A ma grande surprise, le résultat, portant sur 1000 intégrations du système séculaire sur 5 Gyr a montré tout le contraire, et ce système est paru beaucoup plus instable, avec plus de la moitié des trajectoires amenant à des excentricités de Mercure de 0.9.

Pour confirmer ce résultat, j'ai alors procédé à une intégration directe, utilisant un intégrateur symplectique (Laskar *et al.*, 2004), d'un modèle planétaire Newtonien, pour 10 conditions initiales proches. Le résultat a été conforme aux résultats du système séculaire puisque 4 trajectoires sur 10 ont conduit à des excentricités de Mercure de plus de 0.9 (Laskar, 2008). Cette grande excursion de l'excentricité de Mercure s'explique par la présence d'une résonance entre le périhélie de Mercure et de Jupiter, qui est largement facilitée par l'absence de la relativité : La relativité augmente la vitesse du périhélie de Mercure de 0.43"/an, en la faisant passer de 5.15"/an à 5.58"/an, en l'éloignant de la vitesse du périhélie de Jupiter (4.25"/an).

De manière indépendante, Batygin et Laughlin (2008) ont publié des résultats similaires peu de temps après. L'équipe américaine, qui reprend le calcul de (Laskar, 1994) sur un système d'équations non relativistes montre aussi la possibilité de collision entre Mercure et Vénus.

Ces résultats étaient encore incomplets. En effet, comme le système relativiste est beaucoup stable que le système non relativiste, il est beaucoup plus difficile de mettre en évidence une orbite de collision entre Mercure et Vénus dans le système réaliste (relativiste) que dans le système non relativiste pris en considération dans ces deux études récentes précédentes. Le réel défi était donc dans l'estimation de la probabilité de collision de Mercure et Vénus pour un modèle réaliste relativiste, et c'est ce programme que j'avais en vue depuis la rédaction l'article de 2008 qui permettait d'estimer les probabilités de succès de recherche d'une orbite de collision dans un modèle réaliste du Système solaire.

2.5 Recherche d'orbites de collisions Mercure–Vénus

Avec M. Gastineau, nous avons alors entrepris le calcul massif de solutions du mouvement du Système solaire, sous différents aspects, l'ambition étant de retrouver et d'étendre les résultats obtenus 15 ans auparavant avec des équations moyennisées, en utilisant maintenant un modèle non moyennisé, compatible avec les éphémérides planétaires à court terme (Fienga *et al.*, 2008).

Grâce aux études effectuées avec le système séculaire, j'avais estimé à 3 millions d'heures de calcul le temps de calcul nécessaire à une telle étude, mais aucun moyen de calcul national ne permettait même une allocation de calcul 10 fois plus petite. Nous avons alors utilisé tous les moyens auxquels nous avons pu avoir accès : cluster de machines en local, centre de calcul de l'Observatoire de Paris, utilisation de la machine parallèle de l'IPGP, et même développement de la première application en vraie grandeur de l'astronomie sur la grille EGEE avec 500 coeurs (Vuerli *et al.*, 2009). Ces différentes exploitations, associées à de multiples difficultés nous ont permis de récupérer plus de 2 millions d'heures CPU (Mh), mais en même temps, une meilleure estimation des temps de calcul nécessaire à fait monter ce temps à plus de 5 Mh.

Heureusement, le parc informatique national a changé en 2008, avec la mise en place du supercalculateur JADE au CINES, doté de plus de 12000 coeurs de calcul. Dans le cadre des projets expérimentaux pour cette machine, nous avons démarré l'exploitation dès la mise en place de la machine début août 2008. Grâce à cette nouvelle machine, nous avons pu utiliser 5 Mh en 2008, ce qui a permis de finaliser les calculs.

2.6 Possibilité de collisions entre Mercure, Mars, Vénus et la Terre

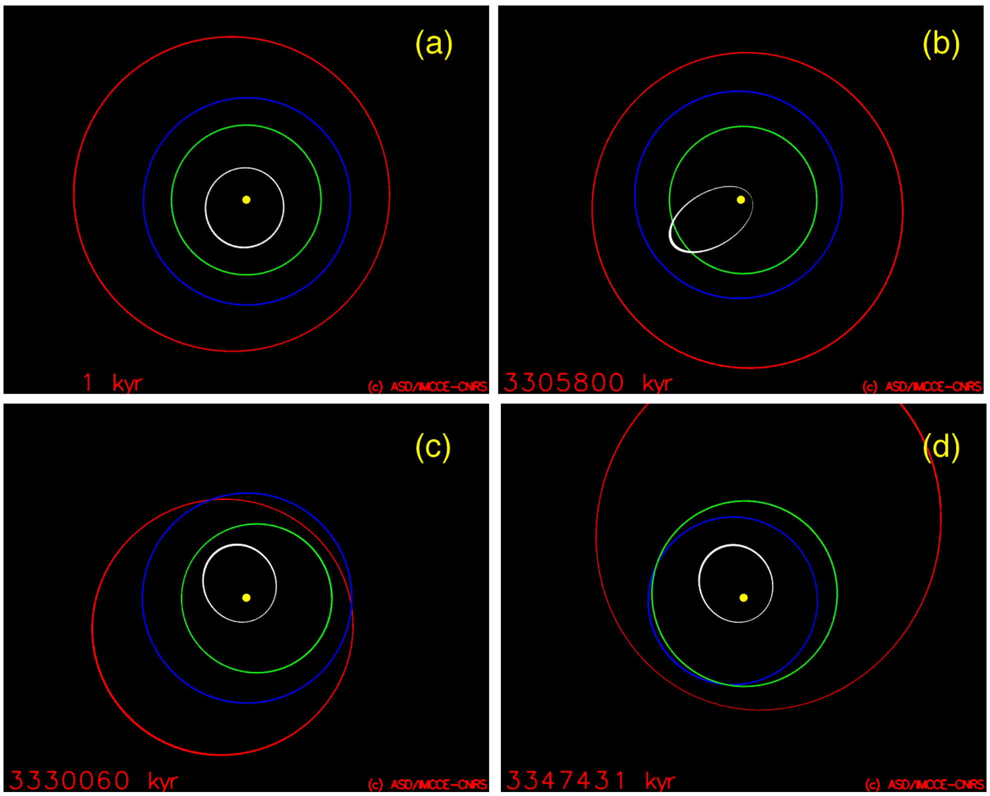


FIG. 6 – Exemple d'évolution à long terme des orbites des planètes telluriques : Mercure (blanc), Vénus (vert), Terre (bleu), Mars (rouge). Le temps est indiqué en milliers d'années (kyr). (a) Au voisinage de l'état actuel, les orbites se déforment sous l'influence des perturbations planétaires, mais sans permettre de rencontres proches ou de collisions. (b) Dans près de 1% des cas, l'orbite de Mercure peut se déformer suffisamment pour permettre une collision avec Vénus ou le Soleil en moins de 5 Ga. (c) Pour l'une des trajectoires, l'excentricité de Mars augmente suffisamment pour permettre une rencontre proche ou une collision avec la Terre. (d) Ceci entraîne une déstabilisation des planètes telluriques qui permet aussi une collision entre Vénus et la Terre (Figure issue des résultats des simulations numériques de Laskar et Gastineau, 2009).

Grâce à la machine JADE, nous avons pu simuler 2501 solutions différentes du mouvement des planètes du Système solaire sur 5 milliards d'années, correspondant à l'espérance de vie du système, avant que le Soleil ne devienne une géante rouge.

Les 2501 solutions calculées sont compatibles avec notre connaissance actuelle du Système solaire. Dans la majorité des cas, celui-ci continue d'évoluer comme dans les quelques millions d'années actuels : les orbites planétaires se déforment et précessent sous l'influence des perturbations mutuelles des planètes mais sans possibilité de collisions ou d'éjections de planètes hors du Système solaire. Néanmoins, dans 1% des cas environ, l'excentricité de Mercure augmente considérablement. Dans plusieurs cas, cette déformation de l'orbite de Mercure conduit alors à une collision avec Vénus ou avec le Soleil d'ici à 5 Ga, tandis que l'orbite de la Terre reste peu affectée. En revanche, pour l'une de ces orbites, l'augmentation de l'excentricité de Mercure est suivie d'une augmentation de l'excentricité de Mars, et d'une déstabilisation complète du Système solaire interne (Mercure, Vénus, Terre, Mars) dans 3.4 Ga. Sur 201 cas étudiés à partir de cette déstabilisation, 5 finissent par une éjection de Mars hors du Système solaire. Tous les autres conduisent à des collisions entre les planètes ou entre une planète et le Soleil en moins de 100 millions d'années. Un cas abouti à une collision entre Mercure et la Terre, 29 cas à une collision entre Mars et la Terre et 18 à une collision entre Vénus et la Terre (Laskar et Gastineau, 2009).

Au-delà de cet aspect spectaculaire, ces résultats viennent valider les méthodes de moyennisation semi-analytiques mises au point depuis plus de 20 ans et qui m'avais permis, il y a 15 ans de montrer déjà la possibilité de collision entre Mercure et Vénus. Ces résultats répondent aussi à la question posée il y a plus de 300 ans par Newton, en montrant que les collisions entre planètes où les éjections sont possible en moins de 5 Ga.

Remerciements

Ce travail a bénéficié d'une aide du Conseil Scientifique de l'Observatoire de Paris, du PNP-CNRS, et des moyens de calcul de GENCI-CINES.

Références

Applegate, J.H., Douglas, M.R., Gursel, Y., Sussman, G.J. and Wisdom, J. : 1986, 'The solar system for 200 million years,' *Astron. J.* **92**, 176–194

Arnold V. : 1963a, Proof of Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonien, *Rus. Math. Surv.* **18, N6** 9–36

Arnold, V. I. : 1963b, 'Small denominators and problems of stability of motion in classical celestial mechanics,' *Russian Math. Surveys,* **18**, 6, 85–193

Batygin, K., Laughlin, G. On the Dynamical Stability of the Solar System *ApJ*, **683**, 1207–1216 (2008)

Brechenmacher, F., 2007, L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766-1874) *Sciences et Techniques en Perspective*, IIe série, fasc. 1, 5–85

Bretagnon, P. : 1974, Termes à longue périodes dans le système solaire, *Astron. Astrophys* **30** 341–362

Brumberg, V.A., Chapront, J. : 1973, Construction of a general planetary theory of the first order, *Cel. Mech.* **8** 335–355

Carpino, M., Milani, A. and Nobili, A.M. : 1987, Long-term numerical integrations and synthetic theories for the motion of the outer planets, *Astron. Astrophys* **181** 182–194

Cohen, C.J., Hubbard, E.C., Oesterwinter, C. : 1973, , *Astron. Papers Am. Ephemeris* **XXII** 1

De la Lande, F. 1774, Abrégé d'Astronomie, première édition, Paris

De la Lande, F. 1795, Abrégé d'Astronomie, seconde édition, augmentée, Paris

Duriez, L. : 1979, Approche d'une théorie générale planétaire en variable elliptiques héliocentriques, *thèse* Lille

Euler, L. 1752, Recherches sur les irrégularités du mouvement de Jupiter et Saturne,

Féjoz, J., Herman, M. : 2004, Démonstration du Théorème d'Arnold sur la stabilité du système planetaire (d'après Michael Herman), *Ergodic theory and Dynamical Systems*, **24**, 1–62

Fienga, A., Manche, H., Laskar, J., Gastineau, M., 2008, INPOP06. A new numerical planetary ephemeris, *A&A*, **477**, 315–327

Giorgilli A., Delshams A., Fontich E., Galgani L., Simo C. : 1989, Effective stability for a Hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three body problem, *J. Diff. Equa.* **77** 167–198

Ito, T., Tanikawa, K. Long-term integrations and stability of planetary orbits in our Solar System, *MNRAS*, **336**, 483–500 (2002)

Kinoshita, H., Nakai, H. : 1984, Motions of the perihelion of Neptune and Pluto, *Cel. Mech.* **34** 203

Kolmogorov, A.N. : 1954, On the conservation of conditionally periodic motions under small perturbation of the Hamiltonian *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **98**, 469

Lagrange, 1766, Solution de différents problèmes de calcul intégral, Miscellanea Taurinensia, t. III, 1762-1765, *Oeuvres t. I, p. 471*

Lagrange, J. L. : 1776, Sur l'altération des moyens mouvements des planètes *Mem. Acad. Sci. Berlin*, 199 Oeuvres complètes **VI** 255 Paris, Gauthier-Villars (1869)

Lagrange, J.-L., 1778, Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des planètes, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1774, publié en 1778.

Lagrange, J.-L., 1781, Théorie des variations séculaires des éléments des planètes, Première partie Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1781. *Œuvres, t. V, p. 125*

Lagrange, J.-L., 1782, Théorie des variations séculaires des éléments des planètes, Seconde partie contenant la détermination de ces variations pour chacune des planètes principales, Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1782. *Œuvres, t. V, p. 211*

Lagrange, J.-L., 1783a, Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes, Première partie, Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1783. *Œuvres, t. V, p. 347*

Lagrange, J.-L., 1783b, Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes,Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1783. *Œuvres, t. V, p. 381*

Lagrange, J.-L., 1784, Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes, Seconde partie, Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1784. *Œuvres, t. V, p. 417*

Lagrange, J.-L., 1808, Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites, Mémoires de la première classe de l'Institut de France, année 1808, *Œuvres, t. VI, p.713*

Lagrange, J.-L., 1808, Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique, Mémoires de la première classe de l'Institut de France, année 1808, *Œuvres, t. VI, p.771*

Lagrange, J.-L., 1809, Second Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique, Mémoires de la première classe de l'Institut de France, année 1809, *Œuvres, t. VI, p.809*

Laplace, P.S. : 1772, Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes Oeuvres complètes **9** 325 Paris, Gauthier-Villars (1895)

Laplace, P.-S., 1775, Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes. Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1772, publié en 1775, *Œuvres, t. VIII, p. 325*

Laplace, P.-S., 1776a, Sur le principe de la Gravitation Universelle, et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, , Savants étrangers, année 1773, t. VII, *Œuvres, t. VIII, p. 201*

Laplace, P.-S., 1776b, Mémoire sur l'Inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure de la Terre et sur leur fonctions, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, Savants étrangers, année 1773, t. VII, 1776, *Œuvres, t. VIII, p. 279*

Laplace, P.S. : 1784, Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites *Mem. Acad. royale des Sciences de Paris*, Oeuvres complètes **XI** 49 Paris, Gauthier-Villars (1895)

Laplace, P.S., 1785, Théorie de Jupiter et Saturne, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, année 1785, 1788, *Œuvres, t. XI, p. 95*

Laskar, J. : 1984, *Thesis*, Observatoire de Paris

Laskar, J. : 1985, Accurate methods in general planetary theory, *Astron. Astrophys.* **144** 133-146

Laskar, J. : 1986, Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory,, *Astron. Astrophys.* **157** 59–70

Laskar, J. : 1989, A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System *Nature*, **338**, 237–238

Laskar, J. : 1990, The chaotic motion of the solar system. A numerical estimate of the size of the chaotic zones, *Icarus*, **88**, 266–291

Laskar, J. : 1992b, La stabilité du Système Solaire, in *Chaos et Déteminisme*, A. Dahan *et al.*, eds., Seuil, Paris

Laskar, J., Quinn, T., Tremaine, S. : 1992a, Confirmation of Resonant Structure in the Solar System, *Icarus*, *95*,148–152

Laskar, J. : 1994, Large scale chaos in the solar system, *Astron. Astrophys.* **287** L9-L12

Laskar, J., Robutel, P., Joutel, F., Gastineau, M., Correia, A. C. M., Levrard, B. : 2004, A long term numerical solution for the insolation quantities of the Earth, *A&A*, **428**, 261–285

Laskar, J. : 2008, Chaotic diffusion in the Solar System *Icarus*, **196**, 1–15

Laskar, J., Gastineau, M. : 2009, Existence of colisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth *Nature*, **459**, 817–819

Le Monnier, 1746a, Sur le Mouvement de Saturne et sue l'inégalité de ses révolutions périodiques, qui dépendent de ses diverses configurations à l'égard de Jupiter, première partie, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris, 30 avril 1746, publié en 1751

Le Monnier, 1746b, Sur le Mouvement de Saturne, Seconde Partie, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris, 7 mai 1746, publié en 1751

LeVerrier U.J.J. : 1856, *Ann. Obs. Paris*, *II* Mallet-Bachelet, Paris

Lochak, P. : 1993, Hamiltonian perturbation theory : periodic orbits, resonances and intermittency, *Nonlinearity*, **6**, 885–904

Morbidelli, A., Giorgilli, A. : Superexponential stability of KAM tori, *J. Stat. Phys.* **78**, (1995) 1607–1617

Moser, J. : 1962, On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus *Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.* II **1**, 1–20

Nekhoroshev, N.N. : 1977, An exponential estimates for the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, *Russian Math. Surveys*, **32**, 1–65

Newhall, X. X., Standish, E. M., Williams, J. G. : 1983, DE102 : a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries, *Astron. Astrophys.* **125** 150–167

Newton, I., 1730, Opticks : Or, A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflexions and Colours of Light. The Fourth Edition, corrected, 4th edition, London (seconde édition "with Additions" en 1717)

Niederman, L., 1996, Stability over exponentially long times in the planetary problem, *Nonlinearity* **9**, 1703–1751

Nobili, A.M., Milani, A. and Carpino, M. : 1989, Fundamental frequencies and small divisors in the orbits of the outer planets, *Astron. Astrophys.* **210** 313–336

Poincaré, H. : 1892-1899, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, tomes I-III, *Gauthier Villard, Paris*, reprinted by Blanchard, 1987

Poincaré, H. : 1898,

Poisson, 1809, Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvments des planètes, lu à l'Académie le 20 juin 1808, Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier XV, t. VIII, 1809, p.1–56

Quinn, T.R., Tremaine, S., Duncan, M. : 1991, 'A three million year integration of the Earth's orbit,' *Astron. J.* **101**, 2287–2305

Robutel, P. : 1995, Stability of the planetary three-body problem. II KAM theory and existence of quasiperiodic motions, *Celes. Mech.* **62,** 219-261

Sussman, G.J., and Wisdom, J. : 1988, 'Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic.' *Science* **241**, 433–437

Sussman, G.J., and Wisdom, J. : 1992, 'Chaotic evolution of the solar system', *Science* **257**, 56–62