

## Le mouvement brownien, “divers et ondoyant”

Bertrand DUPLANTIER  
 Service de Physique Théorique  
 Orme des Merisiers, Bât. 774  
 CEA/Saclay  
 F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

**Abstract.** *Certes c’est un sujet merveilleusement vain, divers et ondoyant, que l’homme : il est malaisé d’y former jugement constant et uniforme.* MICHEL DE MONTAIGNE, Les Essais, Livre I, chapitre 1.

*Pour distinguer les choses les plus simples de celles qui sont compliquées et pour les chercher avec ordre, il faut, dans chaque série de choses où nous avons déduit directement quelques vérités d’autres vérités, voir quelle est la chose la plus simple, et comment toutes les autres en sont plus, ou moins, ou également éloignées.* RENÉ DESCARTES, Règles pour la direction de l’esprit, Règle VI.

*Car, supposons, par exemple que quelqu’un fasse quantité de points sur le papier à tout hasard, comme font ceux qui exercent l’art ridicule de la géomance. Je dis qu’il est possible de trouver une ligne géométrique dont la notion soit constante et uniforme suivant une certaine règle, en sorte que cette ligne passe par tous ces points, et dans le même ordre que la main les avaient marqués.* G. W. LEIBNIZ, Discours de métaphysique.

*Mens agitat molem.* VIRGILE, AENEID. lib. VI.

*Un coup de dés jamais n’abolira le hasard.* STÉPHANE MALLARMÉ, Cosmopolis, 1897.

*L’antimodernisme, c’est la liberté des modernes.* ANTOINE COMPAGNON, à propos du livre “Les antimodernes : de Joseph de Maistre à Roland Barthes”, Bibliothèque des Idées, Gallimard, mars 2005.

Nous décrivons ici brièvement l’histoire du mouvement brownien, ainsi que les contributions d’Einstein, Smoluchowski et Langevin à sa théorie. L’importance toujours actuelle de la théorie du mouvement brownien en physique est illustrée par des expériences récentes en biophysique, où celui-ci sert par exemple à la mesure de la force de traction sur une molécule unique d’ADN.

Dans une seconde partie, nous soulignons l’importance mathématique de la théorie du mouvement brownien, illustrée par deux exemples choisis. La représentation désormais classique de la théorie du potentiel newtonien par le mouvement brownien est expliquée d’une manière élémentaire. Nous concluons par la description des progrès récents survenus en géométrie de la courbe brownienne plane, et des concepts d’invariance conforme et de multifractalité associés, en relation avec la théorie du potentiel de la courbe brownienne elle-même.

### 1 Brève histoire du mouvement brownien

De nombreux grands ouvrages classiques donnent un aperçu historique du mouvement brownien. Parmi ceux-ci, citons ceux de Brush,<sup>1</sup> Nelson,<sup>2</sup> Nye,<sup>3</sup> Pais<sup>4</sup>, Stachel<sup>5</sup> et Wax.<sup>6</sup> Il existe aussi divers essais, dont certains apparus récemment à l’occasion du centenaire des articles d’Einstein de 1905,

<sup>1</sup>S. G. Brush, *The Kind of Motion We Call Heat*, Book 2, p. 688, North Holland (1976).

<sup>2</sup>E. Nelson, *Dynamical Theories of Brownian Motion*, Princeton University Press (1967), second éd., août 2001, <http://www.math.princeton.edu/~nelson/books.html/>.

<sup>3</sup>Mary Jo Nye, *Molecular Reality: A Perspective on the Scientific Work of Jean Perrin*, New-York: American Elsevier (1972).

<sup>4</sup>Abraham Pais, “*Subtle is the Lord...*”, *The Science and Life of Albert Einstein*, Oxford University Press (1982).

<sup>5</sup>John Stachel, *Einstein’s Miraculous Year* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998); *Einstein from ‘B’ to ‘Z’*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (2002).

<sup>6</sup>N. Wax, *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, New-York, Dover (1954). Il contient des articles de Chandrasekhar, Uhlenbeck et Ornstein, Wang et Uhlenbeck, Rice, Kac, Doob.

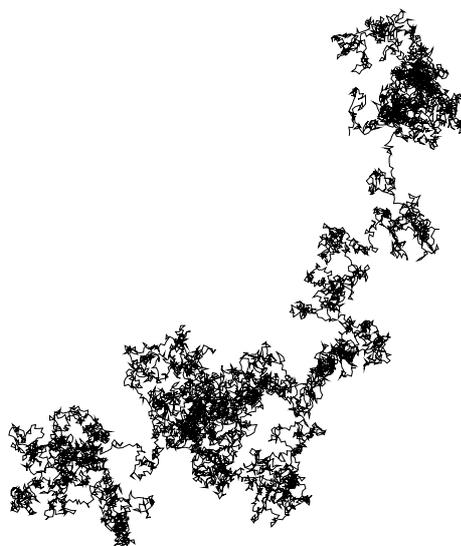


Figure 1: Aspect du mouvement brownien décrit par le centre de gravité d'une particule de pollen en suspension.

en mathématiques,<sup>7</sup> physique<sup>8</sup> ou biologie.<sup>9</sup>

### 1.1 Robert Brown et ses précurseurs

Dans un article publié en 1828 dans l'*Edinburgh Journal of Science*, et republié de multiples fois ailleurs,<sup>10</sup> intitulé "A Brief Account of Microscopical Observations Made in the Months of June, July and August, 1827, on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies", le botaniste Robert Brown rapporta le mouvement aléatoire de différentes particules suffisamment fines pour être en suspension dans l'eau. Il s'agit d'un mouvement extrêmement erratique, apparemment sans fin (voir la figure 1)<sup>11</sup>.

Brown ne fut pas le premier, en fait, à observer le mouvement brownien. Il semble que le mouvement universel et irrégulier de petits grains en suspension dans un fluide ait été vu très tôt après l'apparition du microscope.<sup>12</sup> Il suffit en effet de regarder dans un microscope pour y voir danser de petits objets. Cela commença avec Anthony van Leeuwenhoek (1632-1723), fameux constructeur de microscopes de Delft, qui fut aussi désigné en 1676 comme administrateur de la succession du non moins célèbre peintre Johannes Vermeer, dont on pense qu'il fut l'ami.<sup>13</sup> Leeuwenhoek construisit

<sup>7</sup>J. P. Kahane, Le mouvement brownien : un essai sur les origines de la théorie mathématique, dans *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXème siècle, Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné (Nice, 1996)*, volume 3 des *Séminaires et congrès*, pp. 123-155, Société mathématique de France (1998).

<sup>8</sup>M. D. Haw, *J. Phys. C* **14**, 7769 (2002) ; B. Derrida et É. Brunet dans *Einstein aujourd'hui*, édité par M. Leduc et M. Le Bellac, Savoirs actuels, EDP Sciences/CNRS Éditions (2005).

<sup>9</sup>E. Frey et K. Krey, arXiv: cond-math/0502602.

<sup>10</sup>R. Brown, *Edinburgh New Phil. J.* **5**, 358 (1828) ; *Ann. Sci. Naturelles*, (Paris) **14**, 341 (1828) ; *Phil. Mag.* **4**, 161 (1828) ; *Ann. d. Phys. u. Chem.* **14**, 294 (1828).

<sup>11</sup>On peut consulter des enregistrements de mouvements browniens réels sur le site web : [www.lpthe.jussieu.fr/poincare/](http://www.lpthe.jussieu.fr/poincare/).

<sup>12</sup>S. Gray, *Phil. Trans.* **19**, 280 (1696).

<sup>13</sup>Bien qu'aucun document n'atteste de rapprochement entre Vermeer et Van Leeuwenhoek de leur vivant, il semble impossible qu'ils ne se soient pas connus. Les deux hommes sont nés à Delft la même année, leurs familles respectives faisaient le commerce de textiles et ils étaient tous deux fascinés par la science et l'optique. Une hypothèse communément admise et vraisemblable est que Anthony van Leeuwenhoek fut en fait le modèle de Vermeer, et peut-être la source d'information scientifique de l'artiste, pour ses deux célèbres portraits de scientifiques, *L'astronome*, 1668, (Musée du Louvre, Paris), et *Le géographe*, 1668-69, (Städelsches Kunstinstitut am Main, Francfort). (Voir *Johannes Vermeer*, B. Broos et al., National Gallery of Art, Washington, Mauritshuis, La Haye, Waanders Publishers, Zwolle

plus de cinq cents “microscopes” simples, avec lesquels il alla jusqu’à observer des bactéries vivantes.

On rencontre ensuite Buffon et Spallanzani, les deux protagonistes du débat sur la génération spontanée au dix-huitième siècle, et enfin Bywater, cité par Brown dans son second article, et qui publia en 1819 la conclusion que “non seulement les tissus organiques, mais aussi les substances inorganiques, consistent en particules animées ou irritables”, sujettes au mouvement brownien donc. En fait, des observations similaires à celles de Brown furent rapportées en France, en 1827, par Adolphe Brongniart,<sup>14</sup> un an avant la publication par Brown.

Robert Brown (1773-1858) était l’un des plus grands botanistes de l’Angleterre de son époque. Il est connu pour la découverte du noyau des plantes, et pour la classification de nombreuses plantes exotiques ramenées d’un voyage en Australie en 1801-1805. Sa première publication sur le mouvement erratique des pollens suscita beaucoup d’attention, mais l’utilisation des termes ambigus “*active molecules*” par Brown lui amena des critiques fondées sur une certaine mécompréhension. En effet, sous l’influence de Buffon, l’expression similaire “*molécules organiques*” représentait des entités hypothétiques, des briques élémentaires à partir desquelles tout être vivant devait être constitué. Ce genre de théorie imprégnait encore certains esprits au début du 19ème siècle, si bien que l’on crut que l’opinion de Brown était que les particules elles-mêmes étaient animées. Faraday lui-même dut le défendre lors d’une leçon du vendredi soir qu’il donna à la Royal Society le 21 février 1829 sur le mouvement brownien !<sup>15</sup>

Le mérite de R. Brown fut au contraire de s’émanciper de cette conception et de faire une étude systématique du mouvement qui porte son nom, avec des particules de pollen, de poussière et de suie, de roches pulvérisées, et même d’un fragment du Sphynx, confirmant ainsi l’élimination de l’hypothèse vitaliste, où le mouvement aurait été réservé aux particules organiques. Quant à la nature du mouvement brownien, s’il ne put l’expliquer, il en élimina les explications faciles, comme celles liées aux courants de convection ou d’évaporation, en montrant que le mouvement brownien d’une *simple* particule restait tout aussi infatigable dans une goutte d’eau isolée dans de l’huile ! Il éliminait aussi par la même occasion l’hypothèse de mouvements créés par des interactions entre particules browniennes, hypothèse qui allait pourtant être reprise plus tard. La représentation théorique que s’en fit peut-être Brown, mais qu’il évita toujours soigneusement de présenter comme la conclusion de ses études, aurait été que les particules de matière étaient animées d’un mouvement rapide et irrégulier ayant sa source dans les particules elles-mêmes, et non dans le fluide environnant. Avant de quitter Robert Brown, on ne peut s’empêcher de citer la remémoration par Charles Darwin des années 1830 :

“I saw a good deal of Robert Brown, “*facile Princeps Botanicorum*,” as he was called by Humboldt. He seemed to me to be chiefly remarkable by the minuteness of his observations and their perfect accuracy. His knowledge was extraordinary great, and much died with him, owing to his excessive fear to make a mistake. He poured out his knowledge to me in the most unreserved manner, yet was stangely jealous on some points. I called on him two or three times before the voyage on the *Beagle* [1831], and on one occasion he asked me to look through a microscope and describe what I saw. This I did, and believe now that it was the marvelous currents of protoplasm in some vegetable cell. I then asked him what I had seen; but he answered me, “*That is my little secret.*”<sup>16</sup>

## 1.2 La période d’avant Einstein

Entre 1831 et 1857, il semble que l’on ne trouve plus de référence aux observations de Brown, mais à partir des années 1860, son travail commença à susciter un grand intérêt. Celui-ci s’étendit bientôt aux cercles littéraires, si l’on en juge par un passage de “*Middlemarch*” de George Eliot, publié en 1872, et où le chirurgien Lydgate propose au Rév. M. Farebrother, en échange de specimens marins, “la dernière trouvaille de Robert Brown, *Microscopic Observations on the Pollen of Plants*, si vous ne l’avez pas déjà.”

(1995.)

<sup>14</sup>A. Brongniart, *Ann. Sci. Naturelles* (Paris) **12**, 41 (1827).

<sup>15</sup>S. G. Brush, *The Kind of Motion We Call Heat*, Book 2, p. 688, North Holland (1976).

<sup>16</sup>*Charles Darwin: His Life told in an autobiographical Chapter, and in a selected series of his published letters*, éd. par son fils, Francis Darwin, Londres (1892) ; New York: Schuman (1950), p. 46.

### 1.2.1 Le mouvement brownien et la théorie cinétique des gaz

Il devint clair à partir des expériences faites dans divers laboratoires que le mouvement brownien augmente lorsque la taille des particules en suspension décroît (on ne l'observait essentiellement plus pour des rayons supérieurs à un micron), lorsque la viscosité du fluide décroît, ou lorsque la température augmente. Dans ces années soixante du dix-neuvième siècle, l'idée émergea que la cause du mouvement brownien était à chercher dans les mouvements internes du fluide, et plus précisément que le mouvement en zig-zag des particules en suspension était dû aux collisions avec les molécules de celui-ci.

Le premier nom qu'il convient de citer à cet égard est probablement celui de Christian Wiener, titulaire de la chaire de géométrie descriptive à Karlsruhe, qui, en conclusion de ses observations, réaffirma en 1863 que le mouvement ne pouvait être dû à des interactions entre particules, ni à des différences de températures, ni à de l'évaporation ou à des courants de convection, qu'il fallait en chercher la cause dans le liquide lui-même.<sup>17</sup> Cependant, sa théorie des mouvements atomiques prédatait celle de Clausius et Maxwell, impliquant les mouvements des molécules mais aussi ceux d'"atomes d'éther". Le mouvement brownien aurait alors été relié aux vibrations de l'éther, à une longueur d'onde correspondant à celle de la lumière rouge et à la taille du plus petit groupe de molécules se mouvant ensemble dans le liquide. Une telle explication fut critiquée par R. Mead Bache, qui montra que le mouvement était insensible à la couleur de la lumière, que celle-ci fût violette ou rouge.<sup>18</sup> Chr. Wiener est néanmoins crédité par certains auteurs comme ayant le premier découvert que les mouvements moléculaires pouvaient donner l'explication du phénomène.<sup>19</sup>

Au moins trois autres personnes proposèrent cette idée : Giovanni Cantoni de Pavie, et deux Jésuites belges, Joseph Delsaulx et Ignace Carbonelle, dans des notes publiées entre 1877 et 1880.

"Les mouvements browniens... seraient, dans ma manière de considérer le phénomène, le résultat des mouvements moléculaires calorifiques du liquide ambiant", écrivait ainsi Delsaulx dans l'*Origine thermodynamique des mouvements browniens*.

Ce point de vue, parallèle à celui de la théorie cinétique des gaz, rencontra de fortes oppositions. Un cytologiste tel le Suisse Karl von Nägeli, familier de la théorie cinétique des gaz et des ordres de grandeurs impliqués, ou un chimiste tel le britannique William Ramsey (futur Prix Nobel de Chimie), remarquèrent que les particules en suspension possédaient une masse plusieurs centaines de millions de fois plus grande que celle des molécules du fluide. Chaque collision aléatoire avec une molécule du fluide environnant produisait donc un effet bien insuffisant pour déplacer la particule en suspension. Nägeli écrivait par exemple à propos du mouvement similaire des micro-organismes dans l'air :

"The motion which a sun-mote, and on the whole any particule found in the air, can acquire by the collisions of an individual gas molecule or a multitude of such molecules is therefore so extraordinarily small, and the number of simultaneous collisions against the particule from all sides so extraordinarily large, that the particule behaves as if it were completely at rest."

Il croyait plutôt que la cause du mouvement résidait, non pas dans les mouvements moléculaires thermiques, mais dans des forces attractives ou répulsives.

Et pourtant, la deuxième partie de sa proposition quant à la fréquence des collisions, contenait le principe de la solution. Car il s'agit d'un effet statistique collectif, comme le décrit de manière si perspicace Carbonelle :

"Dans le cas d'une surface ayant une certaine étendue, les chocs moléculaires du liquide, cause de la pression, ne produiront aucun ébranlement du corps suspendu, parce que leur ensemble sollicite également ce corps dans toutes les directions. Mais, si la surface est inférieure à l'étendue capable d'assurer la compensation des irrégularités, il n'y a plus lieu de considérer la pression moyenne, il faut reconnaître des pressions inégales et continuellement variables de place en place, que la loi des grands nombres ne ramènera plus à l'uniformité, et dont la résultante ne sera plus nulle, mais changera continuellement d'intensité et de direction. De plus, les inégalités deviendront de plus en plus apparentes à mesure qu'on supposera le corps plus petit, et par suite les oscillations deviendront en même

<sup>17</sup>Chr. Wiener, *Ann. d. Physik* **118**, 79 (1863).

<sup>18</sup>R. Mead Bache, *Proc. Am. Phil. Soc.* **33**, 163 (1894).

<sup>19</sup>J. Perrin, *Ann. de Chim. et de Phys.* **18**, 1 (1909).

temps de plus en plus vives...”

Un physicien français, Louis-Georges Gouy, fit en 1888 les meilleures observations sur le mouvement brownien, d'où il ressortissait les conclusions suivantes<sup>20</sup> :

- Le mouvement est extrêmement irrégulier, et la trajectoire semble ne pas avoir de tangente.
- Deux particules browniennes, même proches, ont des mouvements indépendants l'un de l'autre.
- Plus les particules sont petites, plus leur mouvement est vif.
- La nature et la densité des particules n'ont aucune influence.
- Le mouvement est plus actif dans les fluides les moins visqueux.
- Le mouvement est plus actif à plus haute température.
- Le mouvement ne s'arrête jamais.

Gouy semblait cependant encore admettre que l'on ne pût expliquer le mouvement brownien par les mouvements désordonnés des molécules, mais par des mouvements partiellement coordonnés à l'intérieur du liquide sur une échelle de l'ordre du micron.

Il acquit pourtant un certain crédit comme “découvreur” de la cause du mouvement brownien, et comme l'écrivit Jean Perrin à propos de ces conclusions expérimentales :

“Ainsi apparaît une propriété profonde, éternelle, de ce qu'on nomme un *fluide en équilibre*. Cet équilibre n'existe que de façon moyenne et pour de grandes masses : c'est un équilibre statistique. En réalité, tout le fluide s'agit indéfiniment et *spontanément* en des mouvements d'autant plus violents et rapides qu'ils concernent des portions plus petites ; la notion statique de l'équilibre est complètement illusoire.”<sup>21</sup>

### 1.2.2 Mouvement brownien et principe de Carnot

L'agitation brownienne se poursuit donc indéfiniment. Ceci n'est pas en contradiction avec le principe de conservation de l'énergie, car tout accroissement de vitesse d'un grain, par exemple, s'accompagne d'un refroidissement local du fluide ambiant, et l'équilibre thermique est statistique.

Gouy fut cependant le premier à noter l'apparente contradiction du mouvement brownien avec le *principe de Carnot*. Celui-ci énonce que l'on ne peut extraire de travail d'une simple source de chaleur. Or il semble bien que du travail soit produit, de manière *fluctuante*, par les mouvements thermiques des molécules du fluide. Gouy mentionna la possibilité théorique d'extraire du travail grâce à un cliquet relié à une particule brownienne, et conclut que le principe de Carnot cessait peut-être d'être valide pour des dimensions de l'ordre du micron, suivant en cela des réserves de Helmholtz quant à la validité de ce principe pour des tissus vivants.

Ces interrogations trouvèrent une oreille attentive chez Poincaré, qui prononça la conférence suivante au Congress of Arts and Sciences à St Louis en 1904, à propos de “La Crise actuelle de la Physique mathématique”<sup>22</sup> :

“Mais voici que la scène change. Le biologiste, armé de son microscope, a remarqué il y a longtemps dans ses préparations des mouvements désordonnés de petites particules en suspension ; c'est le mouvement brownien. Il a cru d'abord que c'est un phénomène vital, mais il a vu bientôt que les corps inanimés ne dansaient pas avec moins d'ardeur que les autres ; il a alors passé la main aux physiciens. Malheureusement, les physiciens se sont longtemps désintéressés de cette question ; on concentre de la lumière pour éclairer la préparation microscopique, pensaient-ils ; la lumière ne va pas sans chaleur, de là des inégalités de température, et dans le liquide des courants intérieurs qui produisent les mouvements dont on nous parle.

M. Gouy eut l'idée d'y regarder de plus près et il vit, ou crut voir que cette explication est insoutenable, que les mouvements deviennent d'autant plus vifs que les particules sont plus petites, mais qu'ils ne sont pas influencés par le mode d'éclairage. Si alors ces mouvements ne cessent pas, ou plutôt renaissent sans cesse, sans rien emprunter à une source extérieure d'énergie, que devons-nous croire ? Nous ne devons pas, sans doute, renoncer pour cela à

<sup>20</sup>L.-G. Gouy, *J. de Physique* 7, 561 (1888).

<sup>21</sup>J. Perrin, *loc. cit.*

<sup>22</sup>Henri Poincaré, *La valeur de la science*, Bibliothèque de philosophie scientifique, Flammarion, Paris (1905) ; in *Congress of Arts and Sciences, Universal Exposition, St. Louis, 1904*, Houghton, Mifflin and Co., Boston and New York (1905).

la conservation de l'énergie, mais nous voyons sous nos yeux tantôt le mouvement se transformer en chaleur par le frottement, tantôt la chaleur se changer inversement en mouvement, et cela sans que rien ne se perde, puisque le mouvement dure toujours. C'est le contraire du principe de Carnot. S'il en est ainsi, pour voir le monde revenir en arrière, nous n'avons plus besoin de l'oeil infiniment subtil du démon de Maxwell, notre microscope nous suffit. Les corps plus gros, ceux qui ont, par exemple, un dixième de millimètre, sont heurtés de tous les côtés par les atomes en mouvement, mais ils ne bougent pas parce que ces chocs sont très nombreux et que la loi du hasard veut qu'ils se compensent ; mais les particules plus petites reçoivent trop peu de chocs pour que cette compensation se fasse à coup sûr et sont incessamment ballottées. Et voilà déjà l'un de nos principes en péril.”<sup>23</sup>

### 1.2.3 L'“hypothèse” moléculaire cinétique

Aujourd'hui, il nous semble évident que le monde est constitué de particules, d'atomes et de molécules. Il n'en fut pas toujours ainsi, et l'hypothèse d'une structure continue de la matière fut défendue avec acharnement jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle par de grands noms comme Duhem, Ostwald ou Mach.

L'intuition ou l'idée que les gaz sont composés de molécules individuelles était déjà présente au dix-huitième siècle, et Daniel Bernoulli en 1738 fut peut-être le premier à affirmer que la pression d'un gaz sur un récipient est due aux collisions des molécules avec les parois. Avogadro émit l'affirmation radicale en 1811 que deux gaz à la même pression et à la même température contiennent le même nombre de molécules. Lorsque ces conditions sont d'une atmosphère et de 25° Celsius, le nombre contenu dans le volume d'un litre est noté  $\mathcal{N}$ , et dit *nombre d'Avogadro*.

Pour faire comprendre l'enjeu de la détermination du nombre d'Avogadro, il faut ici rappeler que dans la loi des gaz parfaits, la constante  $R$  était expérimentalement accessible depuis le dix-huitième siècle, grâce aux travaux de Boyle, Mariotte, Charles, et plus tard Gay-Lussac. Elle est en effet associée au nombre de moles,  $N/\mathcal{N}$ , qui est un paramètre macroscopique expérimental, à la différence des nombres total de particules,  $N$ , et d'Avogadro,  $\mathcal{N}$ , qui sont d'essence microscopique.

L'étude du mouvement brownien joua un rôle essentiel pour établir définitivement l'“hypothèse moléculaire”. Comme l'observe Jean Perrin, l'“hypothèse” que les corps, malgré leur apparence homogène, sont formés de molécules distinctes, en agitation incessante, croissant avec la température, est *logiquement suggérée* par le seul phénomène du mouvement brownien, avant même qu'elle ne l'explique.

En effet, d'après Perrin, ce qui est réellement étrange et nouveau dans le mouvement brownien, c'est qu'il ne s'arrête jamais, à la différence de l'expérience usuelle avec les phénomènes de frottement. Si l'on pense à de l'eau que l'on verse dans un baquet, on se rend compte que le mouvement cohérent initial de l'eau est petit à petit fractionné, décoordonné par les rebonds multiples sur les bords, jusqu'à ce qu'un équilibre apparent s'installe dans le fluide au repos dans le baquet. Ce fractionnement du mouvement, cette décoordination, se poursuivent-ils ad infinitum, comme ils le feraient dans un milieu continu idéal ? Non, car l'observation de particules test sujettes au mouvement brownien précisément, montre que le fluide est capable d'imprimer éternellement des mouvements localement cohérents aux particules en suspension, et ceci parce qu'il existe des molécules de *taille finie* dans le fluide, en collisions élastiques mutuelles permanentes.

Albert Einstein fut en 1905 le premier, avec en fait et de manière indépendante, William Sutherland, à proposer une théorie quantitative du mouvement brownien, qui allait permettre à Perrin, dans des expériences célèbres menées en 1908, de déterminer précisément la valeur de la constante d'Avogadro  $\mathcal{N}$ . Si Einstein réussit là où beaucoup avaient échoué, c'est qu'il utilisa un raisonnement de mécanique statistique global et ingénieux, que nous allons expliquer. Marian von Smoluchowski avait également mené en même temps des réflexions selon un “Gedankenweg” différent, plus probabiliste, qui l'amena à des conclusions similaires. Nous y reviendrons.

#### *Mens agitat molem*

---

<sup>23</sup>Démontrer que le phénomène brownien ne contrevient pas à l'impossibilité de fabriquer un mouvement perpétuel (dit de seconde espèce), où du travail serait extrait de manière cohérente par un observateur (rappelant le fameux démon de Maxwell) est assez subtil. Il fallut attendre Leo Szilard, qui montra en 1929 qu'une telle tentative, de par l'information qu'elle requiert, s'accompagnerait d'une production d'entropie de mesure compensant la réduction d'entropie apparente due à l'utilisation cohérente des fluctuations.

### 1.3 Albert Einstein, 1905

L'article de 1905 qui nous occupe ici et qui est reproduit dans ce fascicule, s'intitule : "*Sur le mouvement de petites particules en suspension dans des liquides au repos requis par la théorie cinétique moléculaire de la chaleur*".<sup>24</sup> Einstein y cherchait à établir à partir de la théorie cinétique moléculaire de la chaleur, l'existence et la taille des molécules, et à déterminer un moyen théorique pour déterminer précisément le nombre d'Avogadro. Il concluait en effet :

"Möge es bald einem Forscher gelingen, die hier aufgeworfene, für die Theorie der Wärme wichtige Frage zu entscheiden !"<sup>25</sup>

Assez étonnamment, il n'était pas encore certain qu'il s'appliquât au mouvement brownien. Son introduction s'ouvre en effet ainsi : "*Dans cet article on va montrer que d'après la théorie cinétique moléculaire de la chaleur, des corps de taille visible au microscope et en suspension dans des liquides doivent exécuter des mouvements d'une magnitude telle que ceux-ci peuvent être aisément observés au microscope. Il est possible que les mouvements discutés ici soient identiques à ce que l'on appelle le mouvement brownien moléculaire ; les données qui me sont accessibles sur ce dernier sont si imprécises que je n'ai pu me former de jugement précis sur la question.*"

Einstein s'appuyait en fait sur les résultats de sa thèse, qu'il déposa onze jours avant de soumettre son fameux article sur les suspensions de particules. Ce n'est que plus tard et progressivement que ses prédictions seront quantitativement confirmées par des données expérimentales affinées sur le mouvement brownien.

#### 1.3.1 Les arguments d'Einstein

Sa démonstration repose sur deux éléments distincts, relevant de domaines apparemment contradictoires.

Il semblait tout d'abord naturel d'invoquer, pour des particules en suspension de taille très supérieure à celle des molécules du liquide, une représentation continue du milieu liquide, la représentation *hydrodynamique*. Un corpus substantiel de connaissances y avait été accumulé, dont la fameuse "formule de Stokes", qui donne la force de friction s'opposant au mouvement d'une sphère dans un liquide.

Mais il fallait en même temps à Einstein réussir à exploiter la théorie cinétique de la chaleur, en s'éloignant du contexte des gaz pour lequel celle-ci avait été à l'origine conçue, pour aller vers celui des liquides, où l'état de la théorie était beaucoup moins avancé. Ce fut la notion essentielle de *pression osmotique*, développée par Van't Hoff, qui permit ce passage. Celle-ci s'appuie sur une vision cinétique du désordre moléculaire, où les molécules dissoutes, d'une taille imaginée être comparable à celle des molécules du liquide, participent au mouvement général comme dans un gaz dilué.

Voici donc Einstein en possession de deux théories s'occupant de particules dans un fluide, l'une, la théorie hydrodynamique de Stokes fondée sur l'hypothèse que le liquide est un milieu continu, qui adhère à une grande surface solide se déplaçant à travers lui, loin de toute turbulence, et où l'agitation moléculaire semble ne jouer aucun rôle ; l'autre, la théorie osmotique de Van't Hoff, fondée sur l'hypothèse que la particule en solution, semblable à une molécule quelconque du fluide, est soumise aux mêmes lois de l'agitation moléculaire.

Il fallut la perspicacité d'Einstein pour comprendre, et démontrer à l'aide de sa connaissance profonde de la mécanique statistique, que les deux points de vue étaient simultanément valides pour des particules aussi grandes que les particules browniennes.

Einstein commence donc par s'intéresser à la pression osmotique créée dans une solution par les molécules de soluté. Cette notion fut développée par J. H. Van't Hoff,<sup>26</sup> qui affirma l'identité, pour des solutions diluées, entre la pression exercée sur des parois semi-perméables par

<sup>24</sup> A. Einstein, *Ann. d. Physik* **17**, 549-560 (1905).

<sup>25</sup> "Souhaitons que bientôt un chercheur parvienne à trancher la question ici posée, si importante pour la théorie de la chaleur".

<sup>26</sup> J. H. Van't Hoff, *Kongliga Svenska Vetenskaps-Academiens Handlingar*, Stockholm, **21**, 1 (1884).

des molécules en solution et la pression partielle exercée par un gaz. Cette surpression,  $p$ , due aux molécules en solution, obéit donc pour des solutions suffisamment diluées à la loi des gaz parfaits

$$p = \frac{n}{\mathcal{N}}RT, \quad (1)$$

où  $R$  est la constante des gaz parfaits,  $T$  la température absolue, et  $n$  le nombre de particules diluées par unité de volume, ou densité particulaire.

Dans sa thèse, Einstein s'était préoccupé de l'effet sur la viscosité de la dilution de telles molécules, comme celles de sucre dans de l'eau. Cette fois, les particules en suspension considérées sont beaucoup plus grandes, pour être observables au microscope. Einstein affirme d'emblée que la différence entre molécules de soluté et particules en suspension n'est qu'affaire de taille, et que la loi de Van't Hoff doit s'appliquer aussi aux particules en suspension. Puis il démontre ce fait et la formule (1), en déterminant l'énergie libre d'un ensemble de telles particules en suspension. Il calcule en fait la fonction de partition associée par la méthode d'espace des phases.

Einstein imagine ensuite que les nombreuses particules de la suspension sont soumises à une force externe  $F$ , qui dépend éventuellement de leurs positions, mais pas du temps.<sup>27</sup> Cette force, prise selon l'axe des  $x$  par exemple, déplace chaque particule de soluté, et entraîne un gradient de concentration. Soit  $n(x, y, z; t)$  le nombre de particules en suspension par unité de volume autour du point  $x, y, z$  à l'instant  $t$ . À un gradient de concentration de particules en suspension correspond d'après (1) une pression osmotique non-uniforme. En considérant la résultante des forces de pression sur une tranche élémentaire  $dx$ , on obtient ainsi une force de pression osmotique *par unité de volume* :

$$\Pi = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\text{grad } p = -\frac{R}{\mathcal{N}}T \text{grad } n(x, y, z; t), \quad (2)$$

où le gradient est ici la dérivée spatiale selon la direction  $x$  de la force.

Par ailleurs, la quantité  $\Pi_F = n F$  représente la force totale extérieure agissant par unité de volume sur les particules browniennes en suspension. Du point de vue à la fois *hydrostatique* et *thermodynamique*, on imagine a priori que l'équilibre d'une unité de volume de la suspension soit instauré lorsque la force  $\Pi_F$  est équilibrée par la force de pression osmotique  $\Pi$ . En exprimant en fait un argument d'invariance à l'équilibre de l'énergie libre de la suspension par rapport à des déplacements virtuels, Einstein démontre en effet que la somme des forces extérieure et osmotique par unité de volume, s'annule :

$$\Pi_F + \Pi = 0, \quad (3)$$

$$n F = \frac{R}{\mathcal{N}}T \text{grad } n. \quad (4)$$

On peut remarquer qu'il obtient directement la formule explicite (4) à partir de l'énergie libre de particules en suspension, sans s'appuyer sur le résultat (1), montrant en cela que les deux résultats proviennent de la même approche.

La seconde partie de l'argument porte sur des considérations *dynamiques d'équilibre de flux*. L'équilibre dans le fluide n'est en effet qu'apparent : pendant que la force  $F$  meut les particules en suspension, celles-ci exécutent leur mouvement brownien, reflet de la nature cinétique de la chaleur.

En se mouvant dans le fluide sous l'influence de la force  $F$ , chaque particule en suspension subit une force de résistance de friction visqueuse. Ceci amène la particule à une vitesse limite  $V = F/\mu$ , où  $\mu$  est le coefficient de friction visqueuse de chaque particule en suspension. Il en résulte un flux de particules

$$\Phi_F = n V = n F/\mu, \quad (5)$$

<sup>27</sup>Cette force peut être par exemple celle de gravitation, comme dans les expériences de sédimentation menées plus tard par Jean Perrin, mais la beauté de l'argument est que son résultat ne dépend pas de la nature de la force, qui peut même être virtuelle, comme dans la notion de "travail virtuel" de la mécanique du dix-huitième siècle.

nombre de particules traversant une unité de surface perpendiculaire à la direction  $x$  de la force.

La densité particulaire  $n(x, y, z; t)$  obéit à l'équation de diffusion locale

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n, \quad (6)$$

où  $\Delta$  représente le Laplacien  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , et où  $D$  est un coefficient, dit de diffusion, qui s'exprime en mètres carrés par seconde. À cette équation est naturellement associé un flux de diffusion  $\Phi_D$ , qui est le nombre de particules diffusant à travers une unité de surface par unité de temps. Ce flux est directement lié au gradient de concentration par<sup>28</sup>

$$\Phi_D = -D \text{grad } n. \quad (7)$$

À l'équilibre, vu ici de manière locale et dynamique, le flux lié à la force,  $\Phi_F$  (5), et le flux de diffusion,  $\Phi_D$  (7), se compensent :

$$\Phi_F + \Phi_D = 0, \quad (8)$$

$$n F/\mu = D \text{grad } n. \quad (9)$$

En comparant alors les équations statique (4) et dynamique (9), on voit qu'elles ont des structures identiques par rapport à  $n$  et son gradient, et qu'il vient une identité nécessaire entre coefficients :

$$D = \frac{1}{\mu} \frac{RT}{\mathcal{N}}. \quad (10)$$

En supposant que les particules en suspension sont toutes des sphères de rayon  $a$ , Einstein utilise enfin la relation de Stokes donnant le coefficient de friction  $\mu$  d'une sphère plongée dans un fluide (continu) de viscosité  $\eta$  :

$$\mu = 6\pi\eta a, \quad (11)$$

d'où il déduit finalement :

$$D = \frac{RT}{\mathcal{N}} \frac{1}{6\pi\eta a}. \quad (12)$$

C'est la fameuse relation d'Einstein, qui se trouve déjà dans sa thèse. En fait, par une coïncidence remarquable, la même relation fut découverte en Australie pratiquement au moment où Einstein effectuait son travail de thèse ! En effet, William Sutherland soumit un article en mars 1905, où cette relation était obtenue par une méthode similaire.<sup>29</sup> On devrait donc certainement l'appeler plus correctement relation de Sutherland-Einstein.

Dans l'article de 1905, Einstein complète ces résultats par des considérations d'essence mathématique et probabiliste. Soit  $P(x, y, z; t)$  la densité de probabilité de trouver une particule brownienne donnée au point  $x, y, z$  au temps  $t$ . Cette densité obéit à l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \Delta P. \quad (13)$$

Suivons-le dans sa démonstration.

Il commence par introduire un intervalle de temps  $\tau$ , petit devant les durées d'observation, mais suffisamment grand pour que les mouvements effectués par une particule durant deux intervalles de temps  $\tau$  consécutifs puissent être considérés comme des événements indépendants.

<sup>28</sup>Einstein pose en fait directement cette équation, sans passer par l'équation de diffusion qu'il démontre plus loin. Pour les lecteurs enclins aux mathématiques, rappelons que le Laplacien est aussi  $\Delta = \text{div}(\text{grad})$ , où la divergence est l'opérateur de dérivation d'un vecteur  $\vec{A}$  :  $\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ , et où le gradient est l'opérateur vectoriel de dérivation  $\text{grad} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . À partir de l'équation de diffusion :  $\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$ , par comptage des particules traversant une surface fermée arbitraire et application du théorème de Green-Ostrogradski, on trouve immédiatement l'existence à travers la surface d'un flux de diffusion  $\Phi_D = -D \text{grad } n$ .

<sup>29</sup>W. Sutherland, *Phil. Mag.* **9**, 781 (1905).

Supposons alors qu'il se trouve un nombre total de particules  $N$  en suspension dans le liquide. Pendant un intervalle de temps  $\tau$ , les coordonnées de chaque particule le long de l'axe  $x$  vont changer d'une quantité  $\Delta$ , où  $\Delta$  prend une valeur différente (positive ou négative) pour chaque particule. Une certaine loi de distribution probabiliste va gouverner  $\Delta$  : le nombre  $dN$  de particules subissant un déplacement dont la valeur se situe entre  $\Delta$  et  $\Delta + d\Delta$  est de la forme

$$dN = N\varphi_\tau(\Delta)d\Delta,$$

où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\tau(\Delta)d\Delta = 1, \quad (14)$$

et où, pour  $\tau$  petit,  $\varphi_\tau(\Delta)$  diffère de zéro seulement pour de très faibles valeurs de  $\Delta$ . Cette fonction satisfait aussi à la condition de symétrie

$$\varphi_\tau(\Delta) = \varphi_\tau(-\Delta). \quad (15)$$

Einstein cherche alors à déterminer comment le coefficient de diffusion dépend de  $\varphi$ , en se restreignant à nouveau au cas unidimensionnel, où la densité particulaire  $n$  ne dépend que de  $x$  et  $t$ . Notons ainsi  $n = f(x, t)$  le nombre de particules par unité de volume, et calculons la distribution de ces particules au temps  $t + \tau$  à partir de leur distribution au temps  $t$ . D'après la définition de la fonction  $\varphi_\tau(\Delta)$ , on obtient le nombre de particules situées au temps  $t + \tau$  entre deux plans d'abscisses  $x$  et  $x + dx$  :

$$f(x, t + \tau)dx = dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \Delta, t)\varphi_\tau(\Delta)d\Delta. \quad (16)$$

Comme  $\tau$  est très petit, nous pouvons poser

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (17)$$

De plus, en développant  $f(x + \Delta, t)$  en puissances de  $\Delta$  :

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \dots$$

Nous pouvons alors placer ce développement sous le signe d'intégration dans (16) puisque seules de très petites valeurs de  $\Delta$  contribuent à cette dernière. Nous obtenons

$$f + \tau \frac{\partial f}{\partial t} = f \times \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\tau(\Delta)d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \varphi_\tau(\Delta)d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi_\tau(\Delta)d\Delta + \dots$$

Du côté droit, les second, quatrième, etc., termes s'annulent d'après la propriété de parité (15), tandis que pour les autres termes, chacun d'entre eux est très petit par rapport au précédent. D'après cette équation, en prenant en compte la propriété de conservation (14), en posant

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi_\tau(\Delta)d\Delta = D, \quad (18)$$

et en ne conservant que les premier et troisième termes du membre de droite, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (19)$$

Il s'agit là de l'équation de diffusion bien connue, où nous reconnaissons en  $D$  (18) le coefficient de diffusion.

Faisons ici une remarque sur la méthode d'Einstein. La définition (18) ci-dessus du coefficient de diffusion  $D$  peut se réécrire

$$\langle \Delta^2 \rangle_\tau \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \varphi_\tau(\Delta)d\Delta = 2D\tau, \quad (20)$$

ce qui représente la valeur moyenne du carré de la variation  $\Delta$  produite par l'agitation thermique pendant le temps  $\tau$ . Formellement identique à la formule (25) que nous allons voir ci-dessous, et qui donne la loi du déplacement carré moyen en fonction du temps, elle porte évidemment en germe celle-ci d'une manière presque tautologique. De plus, comme  $\tau$  est supposé petit, cette définition implique l'existence de la limite (18) pour  $\tau \rightarrow 0$ , si l'on requiert que  $D$  soit indépendant de  $\tau$ .

Einstein continue en remarquant que toutes les particules ont été repérées jusqu'alors par rapport à une origine commune sur l'axe des  $x$ , mais que leur indépendance permet aussi de repérer individuellement chacune par rapport à la position qu'elle occupait au temps  $t = 0$ . Il en résulte alors que  $f(x, t)dx$  est aussi le nombre de particules (par unité d'aire) dont l'abscisse le long de l'axe des  $x$  a varié entre les instants 0 et  $t$  d'une quantité comprise entre  $x$  et  $x + dx$ . Cette fonction  $f$  obéit donc aussi à l'équation de diffusion (19). Einstein ajoute qu'il est évident que l'on doit alors avoir, pour  $t = 0$ ,

$$f(x, t = 0) = 0, \forall x \neq 0; \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)dx = N.$$

Le problème, qui coïncide donc avec celui de la diffusion à partir d'un point (en négligeant les interactions entre particules diffusantes), est maintenant complètement déterminé mathématiquement ; sa solution s'écrit

$$f(x; t) = \frac{N}{(4\pi Dt)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (21)$$

La densité de probabilité,  $P(x, t) = f(x, t)/N$ , pour une seule particule brownienne d'être en  $x$  à  $dx$  près, si elle était en en 0 à l'instant  $t = 0$ , est donc la distribution *gaussienne* normalisée

$$P(x; t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (22)$$

En trois dimensions, si la particule brownienne est en  $\vec{0}$  à l'instant  $t = 0$ , la solution de l'équation (13) est encore une gaussienne, qui s'écrit :

$$P(x, y, z; t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4Dt}\right), \quad (23)$$

et l'on retrouve évidemment la densité  $P(x, t)$  précédente par intégration par rapport aux variables  $y$  et  $z$ .

Ces résultats permettent d'évaluer par intégrale la valeur moyenne du carré du déplacement, par exemple selon l'axe des  $x$ . On trouve

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x; t) dx = \frac{1}{(4\pi Dt)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) dx \\ &= 2Dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Comme nous l'avons fait déjà remarquer ci-dessus, ce résultat pour  $\langle x^2 \rangle_t$  est absolument identique au résultat(20) pour  $\langle \Delta^2 \rangle_\tau$ , ce qui n'est autre que le reflet de l'*invariance d'échelle* du mouvement brownien, une notion peut-être encore non complètement maîtrisée en 1905 !

De la relation physique de Sutherland-Einstein (12), on tire finalement le déplacement brownien moyen en fonction du temps

$$\langle x^2 \rangle_t = 2Dt = \frac{RT}{\mathcal{N}} \frac{1}{3\pi\eta a} t. \quad (25)$$

C'est la première apparition d'une relation dite de *fluctuation-dissipation*, qui relie ici des fluctuations de position à une propriété de dissipation (la viscosité). Dans cette équation fondamentale

pour le mouvement brownien,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $t$ ,  $a$  et  $\eta$  sont mesurables, et ainsi le nombre d'Avogadro peut être déterminé. On ne peut qu'être ébahi par ce résultat : préparez une suspension de petites sphères, très grandes cependant par rapport aux dimensions moléculaires, prenez un chronomètre et un microscope, et mesurez  $\mathcal{N}$  ! Einstein donna un exemple : pour l'eau à 17°C,<sup>30</sup>  $a \approx 0,001 \text{ mm} = 1 \mu\text{m}$ ,  $\mathcal{N} \approx 6 \times 10^{23}$ , on trouve un déplacement  $\langle x^2 \rangle \approx 6 \mu\text{m}$  pour  $t = 1 \text{ mn}$ .

On peut se demander jusqu'à quel point la formule de Sutherland-Einstein (10) ou (12) prouve l'existence des molécules. Autrement dit, que serait la limite du coefficient de diffusion  $D = \frac{RT}{\mu\mathcal{N}}$  si la nature était continue, c'est-à-dire si le nombre d'Avogadro était infini ? On pressent que  $D$  s'annule, et que le déplacement de diffusion brownien (25) *disparaît* tout simplement dans cette limite, mais il faut s'assurer, pour être rigoureux, de l'existence simultanée d'une limite continue finie du coefficient de friction  $\mu$  ou de la viscosité  $\eta$  lorsque  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ . Nous y revenons dans la section (1.5.4) où l'étude d'un modèle microscopique permet un calcul explicite de  $\mu$ , et de conclure que le mouvement brownien est bien une manifestation de l'existence des molécules !

### 1.3.2 Einstein, 1906, théorie générale du mouvement brownien

Dans un autre article écrit en décembre 1905 et reçu le 19 du même mois par *Annalen der Physik*,<sup>31</sup> intitulé cette fois : “*Sur la théorie du mouvement brownien*”, Einstein mentionne que “*Peu après la parution de mon article sur les mouvements des particules en suspension dans des liquides, en relation avec la théorie moléculaire de la chaleur, Siedentopf (de Jena) m'a informé que lui-même et d'autres physiciens -au premier chef le Prof. Gouy (de Lyons [sic])- s'étaient convaincus par des observations directes, que ce que l'on appelle le mouvement brownien est causé par les mouvements thermiques irréguliers des molécules de liquide.*”

*Non seulement les propriétés qualitatives du mouvement brownien, mais aussi l'ordre de grandeur des trajectoires décrites par les particules correspondent complètement avec les résultats de la théorie.*”

Cette fois, Einstein est convaincu qu'il s'agit bien du même phénomène que celui qu'il a décrit. Il s'attache alors à en donner une autre approche théorique, plus générale. Celle-ci va s'appliquer au mouvement de diffusion de translation, mais aussi de rotation de particules en suspension, ou aux fluctuations de charges dans une résistance électrique. Nous décrivons brièvement cette approche qui est très générale, et à notre avis très lumineuse. Elle fait jouer un rôle essentiel à la distribution de Boltzmann à l'équilibre thermodynamique, et montre que la préservation ou la stationnarité de celle-ci dans le temps nécessite l'existence même du mouvement brownien en liaison avec la nature moléculaire de la chaleur.

Einstein considère une grandeur  $\alpha$ , dont la distribution est celle de Boltzmann

$$dn = Ae^{-\frac{N}{RT}\Phi(\alpha)}d\alpha = F(\alpha)d\alpha, \quad (26)$$

où  $A$  est un coefficient de normalisation et où  $\Phi(\alpha)$  est l'énergie potentielle associée au paramètre  $\alpha$ . Ici  $dn$  est proportionnel à la densité de probabilité d'occupation de la valeur  $\alpha$ , à  $d\alpha$  près, et décrit, dans une approche par ensembles de systèmes à la Gibbs, le nombre de systèmes identiques au système actuel pris dans cet état.

Einstein va utiliser cette relation pour déterminer les changements irréguliers du paramètre  $\alpha$  produits par les phénomènes thermiques. Il exprime alors que la fonction  $F(\alpha)$  ne change pas pendant un intervalle de temps  $t$  sous l'effet combiné de la force correspondant au potentiel  $\Phi$  et des phénomènes thermiques irréguliers ;  $t$  est un temps si petit que les changements concomitants de la variable  $\alpha$  dans un système peuvent être considérés comme infiniment petits dans les arguments de la fonction  $F(\alpha)$ .

On se place alors le long de la droite représentant la variable réelle  $\alpha$ , en un point arbitraire  $\alpha_0$ . Pendant le temps élémentaire  $t$ , autant de systèmes doivent passer par le point  $\alpha_0$  dans une

<sup>30</sup>D'après John Stachel dans *Einstein's Miraculous Year* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998), la donnée sur la viscosité de l'eau qui est utilisée est extraite de la thèse d'Einstein, et correspond en fait à une température de 9,5°C.

<sup>31</sup>A. Einstein, *Ann. d. Physik* **19**, 371 (1906).

direction que dans l'autre. La force  $-\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$  correspondant au potentiel  $\Phi$  engendre un changement de la valeur du paramètre  $\alpha$  par unité de temps, ou vitesse de changement de  $\alpha$  :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -B \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}, \tag{27}$$

où  $B$  est, selon les termes d'Einstein, la "mobilité du système par rapport à  $\alpha$ ". Il s'agit là d'une équation de frottement visqueux du même type que l'équation (5) où  $B = 1/\mu$ . D'après (26), il en résulte une variation du nombre de systèmes passant par le point  $\alpha_0$  pendant le temps élémentaire  $t$  :

$$n_1 = -B \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} \times tF(\alpha_0), \tag{28}$$

où le nombre de systèmes est compté algébriquement selon le côté, positif ou négatif, de  $\alpha_0$  vers où ils se dirigent, c'est-à-dire selon le signe de la vitesse (27).

Supposons que la probabilité pour que le paramètre  $\alpha$  change, pendant le même temps  $t$  et sous l'effet des processus thermiques irréguliers, d'une quantité  $\Delta$ , à  $d\Delta$  près, soit égale à  $\psi_t(\Delta)d\Delta$ , où  $\psi_t(\Delta) = \psi_t(-\Delta)$  est indépendant de  $\alpha$ . Cette dernière supposition reflète la nature intrinsèque de l'agitation thermique. Le nombre de systèmes passant par le point  $\alpha_0$  pendant le temps  $t$  dans la direction positive est alors donné par

$$n_2 = \int_0^{+\infty} F(\alpha_0 - \Delta)\chi_t(\Delta)d\Delta, \tag{29}$$

où  $\chi_t(\Delta)$  représente la probabilité cumulée que le système fasse un saut d'au moins  $\Delta$  vers la droite pendant le temps  $t$  :

$$\chi_t(\Delta) = \int_{\Delta}^{+\infty} \psi_t(\Delta')d\Delta'. \tag{30}$$

De la même manière, le nombre de systèmes qui passent à travers la valeur  $\alpha_0$  dans le sens négatif pendant le même temps sous l'effet des fluctuations thermiques est, en le comptant algébriquement,

$$n_3 = - \int_0^{+\infty} F(\alpha_0 + \Delta)\chi_t(\Delta)d\Delta, \tag{31}$$

où l'on a utilisé la propriété de symétrie

$$\chi_t(\Delta) = \int_{\Delta}^{+\infty} \psi_t(-\Delta')d\Delta'. \tag{32}$$

L'équation qui exprime mathématiquement l'invariance de la distribution d'équilibre  $F(\alpha)$  est alors la loi de conservation algébrique du nombre d'ensembles

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0. \tag{33}$$

En reprenant les expressions de  $n_1$ ,  $n_2$ , et  $n_3$ , et se souvenant que  $t$ , et donc les valeurs de  $\Delta$  pour lesquelles  $\psi_t(\Delta)$  est différent de 0, sont infiniment petits, on trouve en développant au premier ordre l'équation essentielle<sup>32</sup>:

$$B \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} \times tF(\alpha_0) + \frac{1}{2}F'(\alpha_0)\langle\Delta^2\rangle_t = 0. \tag{34}$$

<sup>32</sup>En effet, on trouve pour la partie qui concerne les fluctuations thermiques

$$n_2 + n_3 = \int_0^{+\infty} d\Delta [F(\alpha_0 - \Delta) - F(\alpha_0 + \Delta)] \chi_t(\Delta) = -2F'(\alpha_0) \int_0^{+\infty} d\Delta \Delta \chi_t(\Delta),$$

où l'intégrale s'écrit explicitement

$$2 \int_0^{+\infty} \Delta d\Delta \int_{\Delta}^{+\infty} \psi_t(\Delta')d\Delta' = \int_0^{+\infty} (\Delta')^2 \psi_t(\Delta')d\Delta' = \frac{1}{2}\langle\Delta^2\rangle_t,$$

après avoir interverti l'ordre des intégrations ou encore intégré par parties.

Ici

$$\langle \Delta^2 \rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \psi_t(\Delta) d\Delta$$

représente la valeur moyenne du carré de la variation de la quantité  $\alpha$  produite par l'agitation thermique pendant le temps  $t$ .

En utilisant alors la forme de la distribution de Boltzmann  $F(\alpha) \propto \exp\left[-\frac{\mathcal{N}}{RT}\Phi(\alpha)\right]$  qui satisfait automatiquement à l'équation (34), quel que soit le potentiel  $\Phi$ , Einstein obtient la valeur des fluctuations carrées moyennes

$$\langle \Delta^2 \rangle_t = 2B \frac{RT}{\mathcal{N}} t. \quad (35)$$

Ici, comme auparavant,  $R$  est la constante des gaz parfaits,  $\mathcal{N}$  le nombre d'Avogadro,  $B$  la mobilité du système par rapport au paramètre  $\alpha$ ,  $T$  la température absolue, et  $t$  le temps pendant lequel prennent place les changements de  $\alpha$  produits par l'agitation thermique.

L'étude d'Einstein montre donc que la distribution d'équilibre de Boltzmann, interprétée *dynamiquement* comme dans l'équation de conservation (33), implique l'existence d'un mouvement de diffusion brownien pour toute quantité physique  $\alpha$  pour lequel le système possède une mobilité.

Cette idée est d'ailleurs si riche que l'on peut inverser le point de vue et considérer l'équation d'équilibre (34) comme une équation en  $F(\alpha)$ , où  $\langle \Delta^2 \rangle_t$  est indépendant de  $\alpha$  et où  $t$  est arbitraire. Il est alors remarquable que la solution de l'équation (34) ait nécessairement la forme exponentielle de la distribution de Boltzmann (26), où  $\frac{RT}{\mathcal{N}}$  apparaît alors comme un paramètre lié à la diffusion brownienne par l'identité (35). Autrement dit, l'étude générale dynamique du mouvement brownien par Einstein implique également la forme particulière de la distribution d'équilibre à la Boltzmann-Gibbs.<sup>33</sup>

Einstein applique le résultat (35) aux mouvements browniens de translation et de rotation. Pour les mouvements de translation, le paramètre  $\alpha$  est une coordonnée spatiale  $x$  quelconque, et il faut insérer la valeur correspondante de la mobilité  $B$ . Pour une sphère de rayon  $a$ , en suspension dans un liquide de viscosité  $\eta$ , la formule de Stokes, pour laquelle il cite le cours de Kirchhoff<sup>34</sup>, donne comme vu plus haut

$$B = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{6\pi\eta a},$$

et l'on retrouve la formule célèbre (25) :

$$\langle x^2 \rangle_t = \frac{RT}{\mathcal{N}} \frac{1}{3\pi\eta a} t. \quad (36)$$

Einstein traite ensuite, pour la première fois, le mouvement brownien de *rotation* d'une sphère en suspension dans un liquide, et considère les fluctuations carrées  $\langle \vartheta^2 \rangle$  d'un angle de rotation quelconque  $\vartheta$  induites par l'agitation thermique.

Si l'on note alors  $\Gamma = -\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}$  le moment des forces agissant sur une sphère en suspension dans un liquide de viscosité  $\eta$ , la vitesse limite angulaire associée est, d'après Kirchhoff là encore :

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\Gamma}{8\pi\eta a^3}, \quad (37)$$

---

<sup>33</sup>Cela suggère fortement d'introduire dans les cours de physique statistique cette démonstration générale d'Einstein du mouvement brownien, afin de faire comprendre la nature statistique et dynamique de l'équilibre thermodynamique. En effet, dans l'approche habituelle, le mouvement brownien n'est pas du tout enseigné en première partie, et lorsqu'il l'est, apparaît plutôt comme une curiosité. L'approche que l'on privilégie d'habitude consiste à introduire la distribution de Boltzmann, soit via l'ensemble microcanonique et l'entropie de Boltzmann associée, en évaluant cette dernière pour un petit système en contact avec un thermostat, soit via l'entropie statistique de Shannon et l'ensemble canonique. Dans ces approches formelles, l'accent est mis sur les probabilités, et l'on ne voit pas la nécessité du maintien dynamique de la distribution d'équilibre par le processus d'agitation thermique. Après tout, des molécules ou des particules en suspension, même initialement sagement distribuées selon la statistique de Boltzmann, tomberaient toujours au fond du récipient sous l'effet de la gravitation en l'absence de cette agitation thermique !

<sup>34</sup>G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik*, 26. Vorl., 4.

et dans ce cas, l'on doit poser

$$B = \frac{1}{8\pi\eta a^3}.$$

On en déduit

$$\langle \vartheta^2 \rangle_t = \frac{RT}{\mathcal{N}} \frac{1}{4\pi\eta a^3} t. \quad (38)$$

Le mouvement angulaire produit par l'agitation thermique moléculaire décroît donc avec le rayon de la sphère beaucoup plus vite que le mouvement de translation.

Pour  $a = 0,5$  mm, et de l'eau à  $17^\circ$  C, la formule donne pour  $t = 1$  seconde un déplacement angulaire d'environ 11 secondes d'arc, tandis que pour  $a = 0,5$   $\mu$ m elle donne pour le même temps environ  $100^\circ$  d'arc.

Einstein mentionne finalement que la même formule (35) pour  $\langle \Delta^2 \rangle_t$  peut s'appliquer à d'autres cas. Par exemple, si  $B$  est pris comme l'inverse de la résistance électrique  $\rho$  d'un circuit fermé, cette formule indique la quantité d'électricité carrée moyenne

$$\langle e^2 \rangle_t = 2 \frac{RT}{\mathcal{N}} \frac{1}{\rho} t$$

qui traverse une section quelconque du circuit pendant le temps  $t$ .

Einstein conclut son article en évaluant les limites d'applicabilité de sa formule aux temps très courts, pour lesquels des effets de mémoire peuvent se produire. Il arrive ainsi à l'estimation que celle-ci est valable pour  $t$  grand devant un temps caractéristique  $\tau' = m'B$ , où  $m'$  est la masse du fluide déplacé par la sphère.

### 1.3.3 le problème de la mesure de la vitesse

Dans des articles ultérieurs, publiés en 1907 et 1908 dans le *Zeitschrift für Elektrochemie*, Einstein essaie d'attirer l'attention des expérimentateurs sur ses résultats et d'expliquer ceux-ci de manière plus simple. Il revient sur la vitesse moyenne d'une particule en suspension, qui doit suivre la loi d'équipartition

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{RT}{\mathcal{N}}.$$

Pour les solutions colloïdales de platine de Svedberg, de masse  $m \approx 2,5 \times 10^{-15}$  g, ceci donne une vitesse moyenne de 8,6 cm/s. Cependant Einstein note qu'il n'y a aucune possibilité d'observer cette vitesse en raison de l'efficacité du freinage visqueux, qui réduit celle-ci à 1/16 de sa valeur initiale en  $3,3 \times 10^{-7}$  s. Il continue :

“Mais, en même temps, nous devons supposer que la particule reçoit de nouvelles impulsions par un processus inverse de la viscosité, de sorte qu'elle retient une vitesse qui en moyenne égale  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ . Mais comme nous devons imaginer que direction et grandeur de ces impulsions sont (approximativement) indépendantes des direction du mouvement et vitesse originelles de la particule, nous devons conclure que les vitesse et direction du mouvement de la particule vont être déjà fortement altérées dans ce temps extraordinairement court [ $3,3 \times 10^{-7}$  s] et, en fait, d'une manière totalement irrégulière. Il est donc impossible –du moins pour des particules ultramicroscopiques– de déduire  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$  de l'observation.”

D'après le résultat d'Einstein (25), la vitesse apparente dans un intervalle de temps  $\tau$  est inversement proportionnelle à  $\sqrt{\tau}$  et s'accroît donc sans limite lorsque cet intervalle de temps devient plus court. Toute tentative de mesurer la vitesse instantanée de la particule conduit à des résultats erratiques. Ceci explique les échecs répétés des expérimentateurs à obtenir des conclusions bien définies quant à la vitesse des particules en suspension. Ils ne mesuraient simplement pas la bonne quantité, et il fallut attendre qu'Einstein montre que seul le rapport du déplacement carré sur le temps a une limite théorique pour qu'expériences et théorie se rejoignent.

Comme le fait remarquer Brush,<sup>35</sup> ce n'était pas la première fois que la nature particulière du mouvement gouverné par une équation de diffusion pointait son nez. En 1854, William Thomson (qui allait devenir Lord Kelvin) avait appliqué l'équation de la diffusion (c.-à-d. l'équation de Fourier pour la conduction de la chaleur) dans son étude du mouvement de l'électricité dans les lignes télégraphiques. Après avoir effectué presque exactement la même analyse mathématique qu'Einstein allait faire cinquante ans plus tard, Thomson note :

“ We may infer that the retardations of signals are proportional to the squares of the distances, and not to the distances simply; and hence different observers, believing they have found a “velocity of electric propagation,” may well have obtained widely discrepant results ; and the apparent velocity would, *caeteris paribus*, be the less, the greater the length of wire used in the observation.”

Aux temps très courts, une meilleure estimation du comportement des particules en suspension découle de travaux ultérieurs effectués par plusieurs physiciens,<sup>36</sup> dont ceux de Langevin, via son équation stochastique que nous allons voir un peu plus loin, et qui culminèrent avec le processus dit d'Ornstein-Uhlenbeck.<sup>37</sup>

Une formule plus complète est en effet

$$\langle \Delta^2 \rangle_t = 2D \left[ t - mB \left( 1 - e^{-\frac{t}{mB}} \right) \right], \quad (39)$$

où  $D = B \frac{RT}{N}$  est le coefficient de diffusion, et  $m$  cette fois la masse de la particule. On retrouve donc bien la formule (35) pour  $t$  grand devant le temps microscopique

$$\tau = mB = \frac{m}{\mu}, \quad (40)$$

du même ordre de grandeur que le temps  $\tau'$  évalué par Einstein.

À temps  $t$  petit devant  $\tau$ , on trouve un régime *ballistique*

$$\langle \Delta^2 \rangle_t = D \frac{t^2}{mB} = \frac{RT}{N} \frac{1}{m} t^2, \quad \tau \gg t, \quad (41)$$

indépendant cette fois de la viscosité du milieu, et qui, chose remarquable, peut être encore interprété comme en correspondance avec le théorème d'équipartition de l'énergie, cette fois sous la forme :

$$\frac{1}{2} m \frac{\langle \Delta^2 \rangle_t}{t^2} = \frac{1}{2} \frac{RT}{N} \quad \tau \gg t.$$

“*Un coup de dés jamais n'abolira le hasard*” (Stéphane Mallarmé, 1897)

## 1.4 Marian von Smoluchowski

### 1.4.1 Probabilités et stochastité

Le nom de Smoluchowski reste indissolublement associé au mouvement brownien et à la théorie de la diffusion, comme nous allons le voir. Cependant, plus profondément, et comme l'écrit Marc Kac à son propos,<sup>38</sup> par un véritable *tour de force* intellectuel, il montra que les notions de jeu de hasard commandaient la compréhension des phénomènes physiques. On lui doit l'introduction originale et hardie du calcul des probabilités en physique statistique, et il mérite une place aux côtés des grands noms que sont ceux de Maxwell, Boltzmann et Gibbs.

Marian von Smoluchowski est né en 1872, comme Paul Langevin, l'année où Boltzmann publia le grand mémoire qui contient l'équation qui porte son nom, ainsi que le fameux “théorème

<sup>35</sup>S. G. Brush, *opus cit.*

<sup>36</sup>P. Langevin, *C. R. Ac. Sci. Paris* **146**, 530 (1908) ; L. S. Ornstein, *Proc. Amst.* **21**, 96 (1918) ; L. de Haas-Lorentz, “*Le mouvement brownien et certains phénomènes associés*”, *Sammlung Wissenschaft*, B. 52, Vieweg (1913) ; R. Fürth, *Zeit. f. Physik* **2**, 244 (1920).

<sup>37</sup>G. E. Uhlenbeck et L. S. Ornstein, *On the Theory of Brownian Motion*, *Phys. Rev.* **36**, 823-841 (1930).

<sup>38</sup>*Marian Smoluchowski, His Life and Scientific Work*, S. Chandrasekhar, M. Kac, R. Smoluchowski, Polish Scientific Publishers, PNW (2000).

$H$ ". La croissance irréversible de l'entropie liée au second principe de la thermodynamique y est obtenue, dans le cadre de la mécanique classique newtonnienne, à l'aide d'une hypothèse de chaos moléculaire qu'il croyait découler de ce cadre. Cela amenait à des paradoxes sévères (Loschmidt, Zermelo), car les équations de la mécanique classique sont réversibles, et possèdent des cycles de récurrence, dits de Poincaré. Ceci interdit a priori la croissance monotone d'une fonction des variables mécaniques de position et d'impulsion comme la fonction  $H$  de Boltzmann, directement reliée à l'entropie. Boltzmann, sur la défensive, dut alors introduire des arguments probabilistes et statistiques pour justifier ses résultats, tout en changeant souvent de point de vue quant à la nature véritable des probabilités impliquées. La situation devint si confuse que Paul et Tatiana Ehrenfest, par exemple, entreprirent de clarifier les idées de Boltzmann, tout en banissant le terme "probabilité" (mais non le concept) de leur mémoire d'Encyclopédie !

Comme le fait remarquer S. G. Brush,<sup>39</sup> la ligne de recherche de théorie cinétique des gaz que Smoluchowski menait était en continuité avec celle suivie par Clausius, Maxwell, O. E. Meyer, Tait and Jeans, selon laquelle on s'attachait à décrire l'effet des collisions sur la trajectoire d'une molécule et donc sur les propriétés du gaz. Einstein, au contraire, suivait plutôt la voie ouverte par Boltzmann, Maxwell (dans ses articles ultérieurs) et Gibbs, où l'objectif était d'obtenir des lois plus générales à partir de distributions statistiques postulées pour l'ensemble des molécules, sans faire de suppositions sur les forces intramoléculaires et les mécanismes de collisions. Il était alors très intéressant de voir ces deux "Gedankenwege", théorie cinétique et mécanique statistique, se rencontrer à propos du mouvement brownien, *terra incognita* pour tous les deux.

Dans ce contexte, Smoluchowski, de manière courageuse, et travaillant dans le même esprit pragmatique que Maxwell, montra comment utiliser la théorie des probabilités en physique pour en faire un instrument efficace, à une époque où les mathématiciens la méprisaient, et où les physiciens dans une large mesure l'ignoraient. Smoluchowski, sans le savoir, ouvrait un nouveau chapitre de la physique statistique, qui de nos jours porte le nom de processus stochastiques<sup>40</sup>.

#### 1.4.2 Mouvement brownien et marches aléatoires

Ce point de vue probabiliste est clairement présent dans le premier article de Smoluchowski sur le mouvement brownien, *Essai d'une théorie du mouvement brownien et de milieux troubles*<sup>41</sup> publié en 1906 (très probablement sous la pression de la publication par Einstein de ses deux premiers articles), ainsi que dans un autre article, portant sur le libre parcours moyen des molécules d'un gaz.<sup>42</sup> Dans ces articles remarquables, il est apparemment le premier à établir la relation entre *marches aléatoires* et diffusion brownienne, bien que Louis Bachelier eût déjà introduit en 1900 le modèle de marcheur aléatoire dans sa thèse *La théorie de la spéculation*.<sup>43</sup>

<sup>39</sup>S. G. Brush, *locus cit.*

<sup>40</sup>Du grec *stokhastikos*, "qui vise bien", "habile à conjecturer", déjà utilisé par Jacques Bernoulli en 1713 dans *Ars Conjectandi*.

<sup>41</sup>M. R. von Smolan Smoluchowski, *Rozprawy Kraków* **A46**, 257 (1906); trad. franç. : *Essai d'une théorie du mouvement brownien et de milieux troubles*, *Bull. International de l'Académie des Sciences de Cracovie*, pp. 577-602 (1906) ; trad. all. *Ann. d. Physik* **21**, pp. 756-780 (1906).

<sup>42</sup>M. R. von Smolan Smoluchowski, *Sur le chemin moyen parcouru par les molécules d'un gaz et sur son rapport avec la théorie de la diffusion*, *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie*, p; 202-213 (1906).

<sup>43</sup>Louis Bachelier, à qui l'on accorde souvent de nos jours le crédit de cette découverte, fut méconnu. Comme le raconte excellemment Benoît Mandelbrot dans *The Fractal Geometry of Nature*, ce fut Kolmogorov en 1931 qui sortit son nom de l'oubli dans un article aux *Mathematische Annalen*. Bachelier était intéressé par la théorie de la spéculation à la bourse de Paris, et avait développé dans sa première thèse, à partir des marches aléatoires discrètes, une théorie des processus stochastiques proche de la théorie moderne du mouvement brownien, le "processus de Wiener". Sa thèse est dédiée à Poincaré, qui faisait aussi partie du jury à la Faculté des Sciences de Paris, et il est intrigant de noter que le sujet de la Seconde Thèse : Propositions données par la Faculté, s'intitulait : *Résistance d'une masse liquide indéfinie pourvue de frottements intérieurs, régis par les formules de Navier, aux petits mouvements variés de translation d'une sphère solide, immergée dans cette masse et adhérente à la couche fluide qui la touche*.

Mais il n'y a pas mention dans la première thèse, publiée aux *Ann. Sci. École Normale Supérieure* **17**, 21-86 (1900), qu'il y ait aucun lien entre le problème de la spéculation et le mouvement d'une sphère dans un fluide visqueux.

Smoluchowski commence par citer le travail d'Einstein de 1905 et écrit que les résultats de celui-ci “sont en complet accord avec ceux que j’ai obtenus il y a quelques années par une ligne de pensée complètement différente, et que j’ai depuis considérés comme un argument important en faveur de la nature cinétique de ces phénomènes.” Cependant, il ajoute plus loin que sa méthode lui semble plus directe, plus simple et peut-être plus convaincante que celle d'Einstein.”

À la différence d'Einstein qui évite tout traitement des collisions au bénéfice de l’approche de thermodynamique générale que nous avons vue, Smoluchowski a une vision cinétique claire à l’esprit et traite le mouvement brownien comme une marche aléatoire ou un jeu de pile ou face (voir la figure 2).

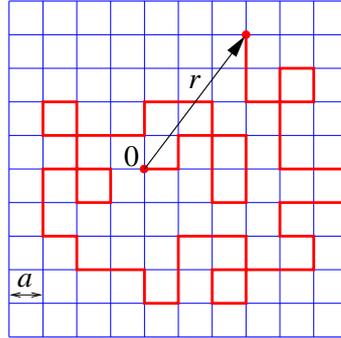


Figure 2: Marche aléatoire sur un réseau carré de maille élémentaire  $a$ . On tire au hasard chaque pas. En deux dimensions, il existe deux méthodes équivalentes. Dans la première, on tire à pile ou face (avec probabilité  $1/2$ ) une direction, verticale ou horizontale, et ensuite le sens de parcours selon la direction choisie. Dans la seconde méthode, on tire de manière équiprobable (avec probabilité  $1/4$ ) l’une des quatre directions possibles. Dans la limite continue où le pas  $a$  du réseau tend vers  $0$ , une très longue marche aléatoire va prendre l’aspect du mouvement brownien de la figure 1.

La nouveauté et l’originalité de son approche viennent du remplacement d’un problème incroyablement difficile (une particule brownienne en collisions dans un gaz ou un liquide) par un processus stochastique relativement simple. Chaque évènement dynamique comme une collision est traité comme un évènement aléatoire semblable à un jeu de pile ou face ou au lancement d’un dé, dont les probabilités élémentaires sont (dans une certaine mesure) déterminées par les lois de la mécanique sous-jacentes. Ce mode de raisonnement fait partie intégrale de nos jours du cadre de pensée de la mécanique ou physique statistique, et, comme le fait remarquer Marc Kac, il nous est probablement difficile d’imaginer la hardiesse intellectuelle qu’il fallut à Smoluchowski pour le mettre en oeuvre dans les premières années du siècle dernier.

### 1.4.3 Contributions de Smoluchowski

Smoluchowski était au courant des derniers travaux sur le mouvement brownien et en particulier des plus récents de Felix Exner. Ce dernier lui envoya en 1900 des diagrammes faits de mémoire, appelés “Krix-Krax” en raison de l’aspect entrecroisé des différents “sauts” apparents exécutés par une particule brownienne observée au microscope selon une suite discrète d’instant.

Smoluchowski commença par faire justice des arguments de Nägeli qui affirmait qu’une collision d’une molécule d’eau sur une sphère de  $0,001$  mm de diamètre entraînerait une vitesse de  $3 \times 10^{-6}$  cm/s, qui serait inobservable au microscope, et qu’en outre les effets des collisions s’annuleraient en moyenne. Il compara ce mode de pensée avec celui d’un joueur qui croirait ne

---

Nous avons vu plus haut l’intérêt porté par Poincaré au mouvement brownien en relation avec la principe de Carnot, intérêt pleinement confirmé ici par le sujet proposé par la Faculté ! On peut alors se demander quel a été l’échange entre Poincaré et Bachelier lors de la soutenance, et pourquoi ils n’ont pas établi eux-mêmes la théorie quantitative du mouvement brownien, avant Einstein et Smoluchowski.

jamais pouvoir perdre plus que le montant d'une mise, malgré des tirages répétés ! En poursuivant l'analogie plus loin, il calcula pour le jeu de pile ou face comment les gains choisis positifs (ou négatifs) cumulés d'un joueur croissent avec le nombre  $n$  de tirages (le "temps").

Soit  $p_{n,m}$  la probabilité d'avoir rencontré  $m$  cas favorables sur un total de  $n$  tirages, soit un gain net de  $m - (n - m) = 2m - n$ . Cette probabilité s'écrit

$$p_{n,m} = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{1}{2^n} C_n^m,$$

où le nombre de combinaisons  $C_n^m$  est le nombre de choix de  $m$  objets pris parmi  $n$ .

La déviation positive ou négative moyenne par rapport à la valeur zéro,  $\delta_n$ , c'est-à-dire la moyenne de la valeur absolue du gain ou de la perte après  $n$  tirages, se calcule alors comme

$$\delta_n = \langle |2m - n| \rangle = 2 \sum_{m=n/2}^n (2m - n) p_{n,m} = 2 \sum_{m=n/2}^n (2m - n) \frac{1}{2^n} C_n^m = \frac{n}{2^n} C_n^{\frac{n}{2}},$$

où l'on a supposé, pour simplifier les notations,  $n$  pair. Pour  $n$  grand, on utilise alors la formule de Stirling,  $n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi}$ , pour évaluer  $\delta_n$  :

$$\delta_n \simeq \sqrt{\frac{2n}{\pi}}, \quad n \gg 1.$$

La moyenne arithmétique des gains ou pertes successifs par rapport à la valeur 0 croît donc comme  $\sqrt{n}$ , aussi petit que soit leur incrément, et quand bien même la moyenne algébrique est nulle. Or le nombre analogue  $n$  de collisions moléculaires par seconde sur une sphère, estimé par Smoluchowski, était de  $10^{16}$  dans un gaz et de  $10^{20}$  pour un liquide. Si le gain en vitesse est à chaque collision de l'ordre de  $10^{-6}$  cm/s, on obtient une vitesse cumulée moyenne de  $10^2$  à  $10^4$  cm/s par seconde. Smoluchowski modère cependant immédiatement cette conclusion en remarquant que les valeurs des gains individuels en vitesse vont fluctuer, et qu'une vitesse de valeur élevée diminue la probabilité d'un gain positif supplémentaire.

Il montre ensuite qu'une "vraie" vitesse de déplacement s'obtiendrait plutôt par l'équipartition de l'énergie cinétique, et conduirait à une vitesse de l'ordre de 0,4 cm/s, encore beaucoup trop grande par rapport aux observations expérimentales ! En effet, les diagrammes d'Exner en "Krix-Krax" donnaient une vitesse d'environ  $3 \times 10^{-4}$  cm/s, un désaccord apparemment irréconciliable. D'après Smoluchowski, "*cette contradiction, déjà remarquée par F. Exner, semble former à première vue une objection décisive à la théorie cinétique. Et pourtant l'explication en est très simple.*"

Il avance en effet l'explication simple et lumineuse suivante : une telle vitesse est trop grande pour être visuellement observable avec un microscope de grossissement 500. Ce que l'on observe est la position moyenne d'une particule animée de cette vitesse, mais bousculée  $10^{20}$  fois par seconde, et à chaque fois dans une direction différente, de sorte que l'on ne peut observer la vitesse instantanée. Chaque déplacement en zig-zag est incomparablement plus petit que la taille de la particule, et ce n'est que lorsque la somme géométrique de ces éléments atteint une certaine valeur que l'on peut observer un déplacement, qui nous apparaît comme plus lent. C'est bien sûr en substance l'argument d'Einstein, mais ici aidé par l'image concrète de la théorie cinétique : le déplacement moyen est la quantité physique observable, tandis que la vitesse ne l'est pas.

Après ces considérations qualitatives, mais illuminantes, Smoluchowski développe son modèle de collisions aléatoires. Soient  $m$  et  $v$  (resp.  $m'$  et  $v'$ ) la masse et la vitesse de la particule en suspension (resp. des molécules du liquide). Par equipartition de l'énergie, on attend en moyenne la relation :

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{m'}{m}}. \quad (42)$$

Il affirme que d'après "*les lois de collision de sphères élastiques*", le changement de la vitesse de la sphère en suspension est, lors d'une collision, donné en moyenne par une petite composante transverse  $\alpha m' v' / m$ , où  $\alpha = 3/4$ . Il en résulte un changement aléatoire de la direction de la vitesse

d'un petit angle  $\varepsilon = \alpha m'v'/mv$ . (D'après (42), on a aussi en moyenne  $\varepsilon = \alpha v/v'$ .) Il suppose aussi que les impacts moléculaires arrivent à des intervalles de temps égaux, ce qui fait que la trajectoire de la particule est une chaîne faite de segments de longueurs égales.

Autrement dit, Smoluchowski adapte la description du libre parcours moyen d'une molécule dans un gaz, si ce n'est qu'ici la persistance du mouvement est raccourcie par la présence des nombreuses molécules du fluide environnantes.

Le problème du mouvement brownien est donc ramené mathématiquement à celui de trouver la distance bout-à-bout moyenne,  $\Delta_n^2$ , d'une chaîne composée de  $n$  segments, tous de longueur  $\ell$ , tourné aléatoirement chacun d'un petit angle  $\varepsilon$  par rapport au précédent. Il en obtient la solution générale par une récurrence assez compliquée impliquant des intégrales multiples angulaires sur les fonctions trigonométriques, sous la forme :

$$\Delta_n^2 = \ell^2 \left\{ \frac{2n}{\delta} + 1 - n - 2 \frac{(1-\delta)^2 - (1-\delta)^{n+2}}{\delta^2} \right\}, \quad (43)$$

où  $\delta = 1 - \cos \varepsilon \simeq \varepsilon^2/2$ .

Dans la limite où  $n\delta$  est petit, on trouve

$$\Delta_n^2 = n\ell \left( 1 - \frac{n\delta}{6} \right), \quad (44)$$

ce qui représente une trajectoire quasi-ballistique.

Dans le cas contraire d'un grand nombre de collisions,  $n\delta$  grand devant l'unité, le premier terme de (43) domine et l'on trouve le résultat attendu :

$$\Delta_n^2 = \ell^2 \frac{2n}{\delta} = \ell^2 \frac{4n}{\varepsilon^2}. \quad (45)$$

Si l'on note  $\bar{n}$  le nombre de collisions par unité de temps, tel qu'il y ait  $n = \bar{n}t$  collisions en un temps  $t$ , on a pour libre parcours  $\ell = v/\bar{n}$ , et en utilisant  $\varepsilon = \alpha v/v'$ , on trouve un déplacement carré moyen au bout du temps  $t$

$$\Delta_n^2 \equiv \Delta_t^2 = \frac{4}{\alpha^2} \frac{v'^2}{\bar{n}} t. \quad (46)$$

L'impulsion  $mv$  de la particule en suspension change en moyenne d'une quantité  $\alpha' m'v$  par collision, où, d'après Smoluchowski,  $\alpha' = 2/3$ , ce qui implique une force de friction  $F = -\bar{n}\alpha' m'v$ , et donc un coefficient de friction  $\mu = \bar{n}\alpha' m'$ . Par substitution de  $\mu$  à  $\bar{n}$  :  $\Delta_t^2 = \frac{4\alpha'}{\alpha^2} \frac{m'v'^2}{\mu} t$ . Par équipartition de l'énergie cinétique des molécules du fluide environnant :  $\langle m'v'^2 \rangle = 3RT/\mathcal{N}$ , et le résultat de Smoluchowski devient finalement

$$\Delta_t^2 = \frac{2\alpha'}{\alpha^2} 6 \frac{RT}{\mu \mathcal{N}} t. \quad (47)$$

On retrouve bien le résultat d'Einstein-Sutherland (10),(25), cette fois en trois dimensions, avec un facteur numérique d'origine cinématique supplémentaire  $2\alpha'/\alpha^2 = (4/3)^3 = 64/27$ , qui, en raison de diverses approximations physiques et géométriques faites en chemin, n'est peut-être pas surprenant ! Les expériences de Svedberg en 1907 semblaient favoriser ce résultat, mais Langevin mentionna plus tard en 1908, dans son article aux Comptes Rendus, qu'une fois ces approximations corrigées, la méthode stochastique de Smoluchowski redonnait bien la formule (25) d'Einstein. Smoluchowski lui-même adopta cette formule dans ses articles ultérieurs.

Il donnera ensuite la théorie complète des fluctuations de densité au sein d'un ensemble de particules browniennes, ainsi que celle de leur sédimentation en champ de pesanteur et de la coagulation des colloïdes.<sup>44</sup> Le nom de Smoluchowski reste ainsi traditionnellement attaché à la généralisation de l'équation de diffusion (13) dans un champ de force  $F$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\Delta P - \frac{1}{\mu} \operatorname{div}(FP), \quad (48)$$

<sup>44</sup>M. R. von Smolan Smoluchowski, *Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekular Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen*, *Physikalische Zeitschrift*, **Jg. 17**, p. 557-571, 585-599 (1916).

où  $\mu$  est le même qu'en (11), équation qui s'applique directement au cas du champ de pesanteur. En une dimension, elle s'écrit sous la forme simple, dite aussi de Fokker-Planck<sup>45 46</sup>

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} P(x,t) \right), \quad (49)$$

pour un champ de force  $F(x)$  dérivant du potentiel  $V(x)$ .

Mentionnons aussi qu'on lui doit encore la théorie de l'opalescence critique, avec Einstein.

#### 1.4.4 Le mouvement brownien et le second principe

Un aspect du travail de Smoluchowski concerne ainsi la formulation statistique correcte du second principe de la thermodynamique. Avec des données récentes de Theodor Svedberg sur le mouvement brownien, il possédait les données expérimentales qui lui permirent, armé de sa propre théorie des fluctuations au voisinage de l'équilibre, d'estimer temps de récurrence et temps de persistance pour un système légèrement hors d'équilibre, et d'en constater l'accord expérimental. Il n'y avait là ni espace de phase, ni théorème de Liouville comme en mécanique statistique classique à la Boltzmann, mais simplement calcul des probabilités.

En y incorporant la théorie des fluctuations, il s'attacha à donner une formulation correcte du second principe de la thermodynamique, où ce principe apparaissait comme valide seulement dans un sens *statistique*, et susceptible de multiples entorses au niveau microscopique.

[Il est à noter que ces discussions sont un sujet très actuel de recherche. Il existe en effet aujourd'hui des résultats théoriques nouveaux, connus sous le nom de théorème de fluctuations de Gallavotti-Cohen<sup>47</sup> ou égalité de Jarzynski.<sup>48</sup> Ils quantifient le travail moyen spontané fourni par une source de chaleur, lors de phénomènes irréversibles. Les manipulations de molécules biologiques uniques, comme celles d'ADN ou d'ARN, qui sont des objets mésoscopiques, permettent de tester expérimentalement ces relations. L'interprétation de ces résultats et de ces expériences est à l'heure actuelle l'objet d'un vif débat, tout comme aux premiers temps du mouvement brownien !<sup>49</sup>]

Avec Einstein, Smoluchowski partage le crédit d'avoir montré l'importance des fluctuations microscopiques en physique statistique, tout en promouvant l'approche probabiliste. En ce sens, il se révéla comme le grand maître héritier en physique de la *Doctrine des chances* d'Abraham de Moivre.

Marian von Smoluchowski mourut prématurément en 1917, à l'âge de quarante-cinq ans, à Cracovie.

### 1.5 Paul Langevin

Connaissant le très grand intérêt théorique du mouvement brownien, signalé par les travaux de Gouy, Einstein, et Smoluchowski, Langevin reprit ces derniers en 1908. Il dit que le facteur 64/27 du résultat de Smoluchowski, dû aux approximations faites, est erroné et que le résultat coïncide avec la formule d'Einstein (25) après correction. Ensuite, il fournit une autre démonstration de celle-ci, qui contient le premier exemple mathématique d'*équation stochastique*.

#### 1.5.1 Équation de Langevin

L'argument de Langevin est lumineux et nous suivons fidèlement sa démonstration.<sup>50</sup> Le point de départ est le théorème d'équipartition de l'énergie cinétique, dû à Maxwell. Celui-ci stipule que l'énergie d'une particule en suspension dans un fluide en équilibre thermique possède, dans la

<sup>45</sup>A. D. Fokker, Thèse, Leiden (1913) ; *Ann. d. Physik* **43**, 810 (1914).

<sup>46</sup>M. Planck, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* p. 324 (1917) ; in *Physikalische Abhandlungen und Vorträge* II, p. 435, Vieweg, Braunschweig (1958).

<sup>47</sup>G. Gallavotti et E. G. D. Cohen, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2694-2697 (1995) ; *J. Stat. Phys.* **80**, 931-970 (1995).

<sup>48</sup>C. Jarzynski, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2690-2693 (1997).

<sup>49</sup>Le lecteur intéressé pourra consulter à ce sujet le texte du Séminaire Poincaré sur *L'Entropie* (2003), disponible sur le site web [www.lpth.e.jussieu.fr/poincare](http://www.lpth.e.jussieu.fr/poincare), et publié dans : J. Dalibard, B. Duplantier, & V. Rivasseau (Éds.), *Poincaré Seminar 2003*, Progress in Mathematical Physics, vol. 38, Birkhäuser, Bâle (2004).

<sup>50</sup>P. Langevin, *C. R. Ac. Sci. Paris* **146**, 530 (1908).

direction  $x$  par exemple, une énergie cinétique moyenne  $\frac{1}{2} \frac{RT}{N}$ , égale à celle d'une molécule gazeuse de nature quelconque, dans une direction donnée, à la même température. Ceci est en relation directe avec la loi de Van't Hoff vue plus haut, qui stipule l'identité entre solutions diluées et gaz parfaits. Si  $v = \frac{dx}{dt}$  est la vitesse à un instant donné de la particule dans la direction considérée, on a donc pour la moyenne étendue à un grand nombre de particules identiques de masse  $m$

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{RT}{N}. \quad (50)$$

Une particule comme celle que nous considérons, grande par rapport aux molécules du liquide, et se mouvant à la vitesse  $v$  par rapport à celui-ci subit une résistance visqueuse égale à  $-6\pi\eta av$ , d'après la formule de Stokes. En réalité, cette valeur n'est qu'une moyenne, et en raison de l'irrégularité des chocs des molécules environnantes, l'action du fluide sur la particule oscille autour de la valeur précédente, de sorte que l'équation du mouvement est, dans la direction  $x$ , selon l'équation de la dynamique de Newton

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\eta av + X. \quad (51)$$

La force complémentaire  $X$ , introduite par Langevin, est *aléatoire*, ou encore *stochastique*. On sait a priori peu de choses d'elle, si ce n'est qu'elle est indifféremment positive et négative, et que sa grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule qui, sans elle, finirait par s'arrêter sous l'effet de la résistance visqueuse.

L'équation (51), multipliée par  $x$ , peut s'écrire encore<sup>51</sup>

$$\begin{aligned} mx \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{2} m \frac{d^2x^2}{dt^2} - mv^2 \\ &= -\mu xv + xX = -\mu \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} + xX, \end{aligned} \quad (52)$$

où le coefficient de friction  $\mu$  représente comme auparavant  $\mu = 6\pi\eta a$ . Si nous considérons un grand nombre de particules identiques et prenons la moyenne des équations (52) écrites pour chacune d'elles, la valeur moyenne du terme  $xX$  est "évidemment" nulle à cause de l'irrégularité des actions aléatoires  $X$ , et l'on trouve<sup>52</sup>

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} - m \langle v^2 \rangle = -\mu \frac{1}{2} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt}. \quad (53)$$

On pose  $u = \frac{1}{2} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt}$ , et l'on utilise l'équipartition de l'énergie cinétique (50) pour arriver à une simple équation différentielle du premier ordre :

$$m \frac{du}{dt} - \frac{RT}{N} = -\mu u. \quad (54)$$

La solution générale est de la forme

$$u = \frac{RT}{\mu N} + C \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right), \quad (55)$$

<sup>51</sup>On utilise, puisque  $v = \frac{dx}{dt}$ , les identités de dérivation  $xv = x \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt}$ , et  $x \frac{dv}{dt} = x \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2x^2}{dt^2} - v^2$ .

<sup>52</sup>Il est à noter que la force  $X$  disparaît de la suite du calcul grâce à cette assertion. Le seul rôle, sous-jacent, de  $X$  est donc d'assurer la possibilité physique d'une moyenne cinétique  $\langle v^2 \rangle \neq 0$ . À la réflexion, l'assertion  $\langle xX \rangle = 0$  n'apparaît pas si évidente que cela, car il aurait pu exister des corrélations subtiles entre position  $x$ , et force stochastique,  $X$ , comme il en existe entre vitesse et force stochastique. L'existence de deux types de calculs stochastiques, à la Itô et à la Stratonovitch, illustre cette difficulté. (Voir par exemple N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Elsevier, Amsterdam (1992).) Einstein fait la même supposition dans sa troisième démonstration du mouvement brownien, voir à part la traduction de sa conférence du 2 novembre 1910 devant la Société de Physique de Zürich.

où  $C$  est une constante arbitraire.<sup>53</sup> Le terme exponentiellement décroissant s'évanouit rapidement et le résultat prend la valeur constante du premier terme en régime permanent au bout d'un temps  $\tau$  de l'ordre de  $\frac{m}{\mu}$  ou  $10^{-8}$  seconde environ pour les particules sur lesquelles le mouvement brownien est observable.

On a donc, en régime permanent d'agitation,

$$u = \frac{1}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{RT}{\mu N}, \quad (56)$$

d'où, pour un intervalle de temps  $t$ ,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2RT}{\mu N} t = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\eta a} t, \quad (57)$$

si l'on suppose la particule avoir été observée à l'origine au temps  $t = 0$ . La méthode de Langevin redonne bien le résultat d'Einstein (25). Sans le savoir, Langevin venait dans cet article, publié en 1908 aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, d'introduire le premier élément, la force aléatoire  $X$ , de ce qui allait devenir le calcul stochastique.<sup>54</sup>

### 1.5.2 Constante de Boltzmann

La constante de Boltzmann,  $k_B$ , est obtenue en rapportant la constante molaire des gaz parfaits,  $R$ , au nombre d'Avogadro,  $N$ , de manière à obtenir une quantité qui se rapporte à une molécule :

$$k_B = \frac{R}{N} = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}. \quad (58)$$

L'énergie  $k_B T$  donne l'énergie d'agitation thermique moyenne à la température usuelle :  $k_B T = 4 \times 10^{-21}$  J. La constante  $k_B$  n'a pas été introduite par Boltzmann, mais par Planck, dans son célèbre exposé du 14 décembre 1900 sur le rayonnement du corps noir, en même temps que la constante de Planck,  $h$  !

### 1.5.3 Analyse de la solution de l'équation de Langevin

La méthode donnée en section (1.5.1) est celle suivie par Langevin dans son article original. Une formulation plus actuelle consiste à se donner les fonctions de corrélation temporelles de la force stochastique  $X$  sous la forme canonique :

$$\langle X \rangle = 0, \quad \langle X(t)X(t') \rangle = A\delta(t-t'), \quad (59)$$

où  $A$  est un coefficient à déterminer et où  $\delta(t-t')$  est la distribution de Dirac. La généralisation à  $d$  dimensions en est

$$\begin{aligned} \langle \vec{X} \rangle &= \vec{0}, \\ \langle X_i(t)X_j(t') \rangle &= A\delta_{ij}\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (60)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker pour les indices de coordonnées  $i, j = 1, \dots, d$ .

On intègre facilement l'équation linéaire concernant la vitesse

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{v} + \vec{X}. \quad (61)$$

<sup>53</sup>Ici, il semble y avoir une contradiction entre l'existence d'un terme exponentiel et l'hypothèse d'équipartition de l'énergie,  $m\langle v^2 \rangle = \frac{RT}{N}$ , faite pour tout  $t$  par Langevin, car ce n'est qu'à  $t$  grand que les effets de mémoire sont exponentiellement amortis. Cette hypothèse, ainsi qu'une solution du type de celle obtenue en (55), peuvent cependant être correctes à tout  $t$ , pourvu que l'on pose la même condition sur la vitesse initiale, ce qui va en fait fixer la valeur de la constante  $C$  à être égale à  $C = -\frac{RT}{\mu N}$ . Nous y revenons plus loin dans l'étude détaillée de la solution de l'équation de Langevin.

<sup>54</sup>J. L. Doob, The Brownian Motion and Stochastic Equations, *Ann. of Math.*, **43**, pp. 351-369 (1942), réimpr. dans [Wax 1954, pp. 319-337], *op. cit.*

en

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \vec{X}(t') e^{-\frac{\mu}{m}(t-t')}. \quad (62)$$

En prenant alors le carré de la vitesse et en utilisant les formules (60), on trouve la valeur moyenne de l'énergie cinétique au temps  $t$

$$\frac{1}{2}m\langle\vec{v}^2(t)\rangle = \frac{Ad}{4\mu} \left(1 - e^{-2\frac{\mu}{m}t}\right) + \frac{1}{2}m\vec{v}^2(0)e^{-2\frac{\mu}{m}t}. \quad (63)$$

On voit donc que cette énergie relaxe vers une valeur constante à grand temps, c'est-à-dire à l'équilibre. Du théorème de l'équipartition de l'énergie cinétique,

$$\frac{1}{2}m\langle\vec{v}^2(t)\rangle_{t\rightarrow\infty} = \frac{d}{2}k_B T, \quad (64)$$

on déduit alors l'identité importante

$$A = 2\mu k_B T. \quad (65)$$

On obtient donc

$$\langle\vec{v}^2(t)\rangle = \frac{dk_B T}{m} + \left(\vec{v}^2(0) - \frac{dk_B T}{m}\right) e^{-2\frac{\mu}{m}t}. \quad (66)$$

Une seconde étape consiste ensuite à intégrer l'équation (62) pour obtenir le déplacement  $\vec{r}(t) - \vec{r}(0)$ . Prenant ensuite le carré de celui-ci, puis la valeur moyenne stochastique à l'aide des formules (60), on obtient après calculs :

$$\begin{aligned} \langle[\vec{r}(t) - \vec{r}(0)]^2\rangle &= 2dD \left[ t - \frac{m}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right) \right] \\ &+ \left( \vec{v}^2(0) - \frac{dk_B T}{m} \right) \left( \frac{m}{\mu} \right)^2 \left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)^2, \end{aligned} \quad (67)$$

où, comme auparavant,  $D = k_B T/\mu$ . La dérivée  $u$  considérée par Langevin est alors donnée par

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle[\vec{r}(t) - \vec{r}(0)]^2\rangle \\ &= d \frac{k_B T}{\mu} - \vec{v}^2(0) \frac{m}{\mu} e^{-\frac{\mu}{m}t} + \left( \vec{v}^2(0) - \frac{dk_B T}{m} \right) \frac{m}{\mu} e^{-2\frac{\mu}{m}t}. \end{aligned} \quad (68)$$

Remarquons tout d'abord que ces résultats tendent asymptotiquement pour  $t$  grand, soit  $t \gg \tau = m/\mu$ , vers les résultats d'équilibre thermique et le mouvement de diffusion associé, comme attendu.

On remarque alors le rôle joué par la vitesse initiale dans les effets de mémoire et l'approche à l'équilibre. Une valeur très particulière de  $\vec{v}^2(0)$  est la valeur d'équipartition  $\frac{dk_B T}{m}$ . Pour celle-ci uniquement, la vitesse carrée moyenne trouvée en (66) devient *invariante* dans le temps,  $\langle\vec{v}^2(t)\rangle = \frac{dk_B T}{m}, \forall t$ . Le déplacement carré moyen (67) prend alors la forme simple d'Ornstein (39), et la quantité  $u$  (68) prend la forme prédite par Langevin en (55), avec une valeur déterminée pour  $C$ . D'une manière cohérente, on obtient aussi le même résultat si l'on prend pour  $\vec{v}^2(0)$  sa valeur la plus probable, c'est-à-dire sa *moyenne thermique d'équipartition*. Ceci permet de comprendre a posteriori la possibilité de la démarche de Langevin qui posait l'identité (50) au milieu de la démonstration, ce qui le plaçait d'emblée dans le cas stationnaire de l'équipartition !

En revanche, si l'on donne à la vitesse carrée initiale  $\vec{v}^2(0)$  une valeur différente de celle de l'équilibre, la relaxation vers celui-ci se fera de manière un peu plus complexe, comme on le voit sur les résultats complets donnés ci-dessus.

Le régime des temps courts,  $\frac{m}{\mu} \gg t$ , dépend aussi naturellement des conditions initiales. On trouve en effet en développant (67) le régime ballistique attendu

$$\langle[\vec{r}(t) - \vec{r}(0)]^2\rangle = \vec{v}^2(0) t^2 + \mathcal{O}(t^3),$$

qui recoupe naturellement (41) si l'on prend une fois encore la valeur d'équipartition.

### 1.5.4 Modèle microscopique

La force proposée par Langevin,  $-\mu v + X$ , ne peut être qu'une approximation de la réalité moléculaire sous-jacente, faite de collisions innombrables où des corrélations multiples dues aux interactions entre molécules existent à des temps très courts. La forme choisie en (59,60) pour les fluctuations du terme stochastique  $X$  est celle d'un bruit blanc sans mémoire, qui néglige donc ces corrélations temporelles.

En outre, la forme hydrodynamique du terme de friction,  $-\mu v$ , est en fait une description qui appartient au continu, ce qui nécessite que les collisions sur la particule en suspension soient extrêmement fréquentes. La masse  $m$  de celle-ci doit alors être assez grande pour que le temps caractéristique  $\tau = m/\mu$  soit grand devant la fréquence inverse des collisions.

Pour se faire une idée de l'origine de l'équation de Langevin (51) et de ses paramètres  $\mu$  et  $A$  (65), il est cependant naturel de considérer le modèle le plus simple, où les collisions de la particule en suspension se font avec les particules d'un gaz parfait environnant, et donc sans interaction.<sup>55</sup>

On considère donc un gaz parfait de particules identiques de masses  $m'$ , de densité particulaire  $n'$  à la température  $T$ , et baignant la particule de masse  $m$  en suspension. Pour simplifier, on prend ce gaz à une dimension, ce qui permet d'écrire des équations de collisions élastiques du gaz avec la particule suspendue qui sont particulièrement simples. On trouve alors que l'équation de variation de l'impulsion de la particule test est similaire à l'équation de Langevin, avec des coefficients explicites<sup>56</sup>

$$\mu = 4n' \sqrt{\frac{2m'k_B T}{\pi}}, \quad A = 8n'k_B T \sqrt{\frac{2m'k_B T}{\pi}}, \quad (69)$$

et  $\mu$  et  $A$  vérifient donc bien (65).

Il est alors particulièrement intéressant de récrire ces termes en fonctions des *grandeurs molaires* qui caractérisent le gaz parfait. On introduit ainsi la pression<sup>57</sup> du gaz,  $p'$ , qui obéit à l'équation des gaz parfaits  $p' = n'k_B T$ , ce qui donne

$$\mu = 4p' \sqrt{\frac{2\mathcal{M}}{\pi RT}}, \quad A = \frac{2RT}{\mathcal{N}} 4p' \sqrt{\frac{2\mathcal{M}}{\pi RT}}, \quad (70)$$

où  $\mathcal{M} = \mathcal{N}m'$  est la masse molaire du gaz.

### 1.5.5 Discontinuité de la Nature et existence du mouvement brownien

On peut alors remarquer que les résultats explicites ci-dessus, sous leur dernière forme (70), permettent d'affirmer rigoureusement que la formule de Sutherland-Einstein (10),  $D = \frac{RT}{\mu\mathcal{N}}$ , reflète bien l'existence des molécules.

En effet, le coefficient de friction  $\mu$  peut bien s'exprimer indépendamment du nombre d'Avogadro  $\mathcal{N}$ , et ne dépend que de la constante des gaz parfaits  $R$  et des paramètres *macroscopiques* du gaz environnant, pression  $p'$ , température  $T$ , et masse molaire  $\mathcal{M}$ . En revanche, la variance  $A$  de la force stochastique de Langevin, qui contrôle la diffusion, continue à dépendre de  $\mathcal{N}$  et tend vers 0 lorsque le nombre d'Avogadro tend vers l'infini.

De même, la limite du coefficient de diffusion,  $D = \frac{RT}{\mu\mathcal{N}}$ , dans l'hypothèse où le nombre d'Avogadro serait infini,  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ , est donc bien *nulle*, autrement dit *le mouvement brownien cesserait immédiatement si la Nature était continue !* Une branche entière des mathématiques n'aurait alors peut-être jamais vu le jour.

<sup>55</sup>D. Durr, S. Goldstein, J. L. Lebowitz, *A Mechanical Model of Brownian Motion*, *Commun. Math. Phys.* **78**, 507 (1981).

<sup>56</sup>On calcule, dans le processus de collision discret, la variation moyenne de l'impulsion  $\langle \frac{dp}{dt} \rangle = -\mu \langle v \rangle$  ainsi que les fluctuations  $\langle \frac{dp(t)}{dt} \frac{dp(t')}{dt'} \rangle - \langle \frac{dp(t)}{dt} \rangle \langle \frac{dp(t')}{dt'} \rangle = A\delta(t-t') + \dots$ , et trouve par comparaison les valeurs (69) des paramètres  $\mu$  et  $A$  de l'équation de Langevin. Voir l'article de B. Derrida et É. Brunet dans *Einstein aujourd'hui*, éd. M. Leduc et M. Le Bellac, Savoirs actuels, EDP Sciences/CNRS Éditions (2005).

<sup>57</sup>En une dimension, la pression  $p'$  est homogène à une force, car les bords de la "boîte" contenant le gaz sont des points.

## 1.6 Les expériences de Jean Perrin

### 1.6.1 Le triomphe de l’“hypothèse moléculaire”

Jean Perrin est souvent crédité d’avoir établi la théorie d’Einstein-Smoluchowski-Sutherland par ses belles expériences. Il fut aussi un propagandiste remarquable des idées atomistes. La lecture de son livre, *Les Atomes*,<sup>58</sup> qui contient une description détaillée des expériences menées sur le mouvement brownien, est vivement recommandée. Elle commence par :

“ Molécules : Il y a vingt siècles peut-être, sur les bords de la mer divine, où le chant des aèdes venait à peine de s’éteindre, quelques philosophes enseignaient déjà que la matière changeante est faite de grains indestructibles en mouvement incessant, atomes que le hasard ou le destin auraient groupés au cours des âges selon les formes ou les corps qui nous sont familiers. Mais nous ne savons presque rien de ces premières théories.”

Il insista par ailleurs sur l’idée que les fonctions continues non-dérivables, telle la trajectoire du mouvement brownien, étaient tout aussi naturelles que les fonctions dérivables, objets de toutes les études. Dans la préface des *Atomes*, considérant la forme aux irrégularités sans limite de la surface des colloïdes, et faisant le parallèle avec la forme de la côte de la Bretagne, il annonce dans une intuition géométrique fulgurante les idées de Lewis Fry Richardson sur les dimensions anormales de Hausdorff, qui seront développées par Benoît Mandelbrot.<sup>59</sup>

On trouve ainsi à propos du mouvement brownien :

“Nous resterons encore dans la réalité expérimentale, si, mettant l’œil au microscope, nous observons le mouvement brownien qui agite toute petite particule en suspension dans un fluide. Pour fixer une tangente à sa trajectoire, nous devrions trouver une limite au moins approximative à la direction de la droite qui joint les positions de cette particule en deux instants successifs très rapprochés. Or, tant que l’on peut faire l’expérience, cette direction varie follement lorsque l’on fait décroître la durée qui sépare ces deux instants. En sorte que ce qui est suggéré par cette étude à l’observateur sans préjugé, c’est encore la fonction sans dérivée, et pas du tout la courbe avec tangente.”

On lit plus loin :

“On ne peut même plus fixer une tangente, même de façon approchée, à aucun point de la trajectoire, et c’est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues<sup>60</sup> sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l’on regarderait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque la nature les suggère aussi bien que les fonctions à dérivées.”

Ces remarques stimulèrent, semble-t-il, les recherches du jeune mathématicien Norbert Wiener.<sup>61</sup>

Les belles expériences menées à partir de 1908 par Perrin et ses étudiants, sur des émulsions de gomme-gutte ou de mastic, sont décrites en détail dans son article de revue *Mouvement brownien et réalité moléculaire*, paru aux Annales de Chimie et de Physique en 1909,<sup>62</sup> et qui décrit les résultats parus dans de nombreuses *Notes aux Comptes Rendus*.

Perrin commença par vérifier la répartition exponentielle de la densité de particules  $n$  dans une suspension, en fonction de l’altitude  $h$  dans un champ de gravitation  $g$ , formule qui généralise la formule barométrique pour l’atmosphère. Il l’écrit sous la forme

$$\frac{2}{3}W \ln \frac{n_0}{n} = \phi(\rho - \rho_0)gh, \quad (71)$$

où  $\phi$  est le volume de chaque grain,  $\rho$  et  $\rho_0$  les masses volumiques des grains et du liquide intergranulaire, et, *last but not least*,  $W$  l’énergie cinétique moyenne par particule (soit  $W = \frac{3}{2} \frac{RT}{N} = \frac{3}{2} k_B T$ ).

<sup>58</sup>J. Perrin, *Les Atomes*, Félix Alcan, Paris (1913) ; réédition Champs Flammarion (1991).

<sup>59</sup>B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, (3ème éd.), suivie de *Survols du langage fractal*, Flammarion, Nouvelle Bibliothèque scientifique (1989).

<sup>60</sup>“Continues parce que nous ne pouvons imaginer que le granule passe d’une position à une autre sans couper un plan quelconque de part et d’autre duquel se trouvent ces deux positions.

<sup>61</sup>N. Wiener, *I am a Mathematician*, Doubleday, Garden City, NY (1956).

<sup>62</sup>J. Perrin, *Ann. Chim. Phys.* **18**, 1 (1909) ; disponible en ligne sur <http://gallica.bnf.fr/>.

Il remarque : “J’ai indiqué cette équation à l’occasion de mes premières expériences (*Comptes rendus*, mai 1908). J’ai su depuis que, séparément, Einstein et Smoluchowski, à l’occasion de beaux travaux théoriques dont je parlerai plus loin, avaient déjà vu que la répartition exponentielle est une conséquence nécessaire de l’équipartition de l’énergie. Ils ne semblent pas d’ailleurs avoir songé qu’on pouvait réaliser dans ce sens un *experimentum crucis* décidant pour ou contre la théorie moléculaire du mouvement brownien.”

Il poursuit :

“Si l’on peut réussir à mesurer les grandeurs autres que  $W$  qui figurent dans cette équation, on pourra voir si elle se vérifie et si la valeur qu’elle indique pour  $W$  est bien celle qui a été approximativement assignée à l’énergie moléculaire. Dans l’affirmative, l’origine du mouvement brownien sera établie, et les lois des gaz, déjà étendues par Van’t Hoff aux solutions, pourront être regardées comme encore valables même pour des émulsions à grains visibles.”

Il mit ainsi au point un dispositif de centrifugation fractionnée pour produire des émulsions de taille uniforme, élément clé du succès de l’entreprise. Par trois procédés indépendants pour mesurer le rayon des particules, dont l’un à l’aide de la loi de Stokes, il put au passage vérifier la validité de celle-ci pour les particules en suspension. C’était en effet l’un des points faibles des démonstrations théoriques, car les conditions de continuité demandées par l’hydrodynamique étaient loin d’être clairement remplies dans le cas de petits sphérules qu’anime un mouvement brownien très actif.

Enfin, par des observations ingénieuses et patientes, il put vérifier la loi de raréfaction de la densité (71).<sup>63</sup> Grâce à la valeur de  $W$  trouvée indépendante des conditions expérimentales, hormis la température, il vérifia la fameuse loi d’équipartition de l’énergie, et obtint une première valeur du nombre d’Avogadro par cette méthode,  $\mathcal{N} = 7,05 \times 10^{23}$ , alors que la valeur actuelle admise est de  $\mathcal{N} = 6,02 \times 10^{23}$ .

### 1.6.2 Les formules d’Einstein

Perrin se tourna ensuite vers les formules d’Einstein pour la diffusion brownienne : “...une autre démarche était possible et avait été proposée par Einstein<sup>64</sup>, en conclusion de très beaux travaux théoriques, dont je dois maintenant parler.” Plus loin, il ajoute : “Il me paraît juste de rappeler que, presque en même temps qu’Einstein et par une autre voie, Smoluchowski est arrivé à une formule peu différente dans son remarquable Mémoire sur *une théorie cinétique du mouvement brownien* (*Bulletin de l’Académie de Cracovie*, juillet 1906) (rédigé en français) où l’on trouve, outre des réflexions très intéressantes, un excellent historique des travaux antérieurs à 1905.”

Il commence par rappeler les travaux anciens d’Exner, antérieurs à la publication de la formule du déplacement carré moyen (25), et dans lesquels on peut voir “au moins une présomption de vérification partielle de la formule en question”.

À la suite de la publication de cette formule, la vérification en fut rapidement tentée par Theodor Svedberg, qui crut y parvenir.<sup>65</sup> Perrin fait une critique serrée des résultats de celui-ci, et le déclare tout bonnement “victime d’une illusion” lors de sa description des trajectoires browniennes sous écoulement “comme régulièrement ondulées d’amplitude et de longueur d’onde bien définies !”<sup>66</sup>

Les résultats de Victor Henri, publiés aux *Comptes rendus* en 1908, étaient tirés d’une étude cinématographique mieux fondée du mouvement brownien de grains naturels de latex. Le déplacement moyen variait bien comme la racine du temps, mais le coefficient était trois fois trop grand.<sup>67</sup>

<sup>63</sup>J. Perrin, *C. R. Acad. Sci. Paris* **146**, 967 (1908) ; **147**, 475 (1908).

<sup>64</sup>“Möge es bald einem Forscher gelingen, die hier aufgeworfene, für die Theorie der Wärme wichtige Frage zu entscheiden !”

<sup>65</sup>Th. Svedberg, *Studien zur Lehre von den kolloidalen Lösungen*, *Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsaliensis*, **2**, 1907.

<sup>66</sup>Il faut ajouter tout de même que Svedberg reçut le prix Nobel de chimie en 1926 pour son invention de l’ultracentrifugeuse.

<sup>67</sup>Perrin note alors assez malicieusement : “Autant que j’ai pu juger par la conversation, il se produisit alors, chez les physiciens français qui suivaient de près ces questions, un courant d’opinion qui m’a très vivement frappé, en me prouvant combien est limité, au fond, le crédit que nous accordons aux théories, et à quel point nous y voyons des instruments de découverte plutôt que de véritables démonstrations.”

Disposant de grains de diamètre exactement connu, Perrin chargea alors son étudiant Chaudesaigues de vérifier la loi de déplacement brownien par observation directe, séquencée toutes les trente secondes, de grains de gomme-gutte de rayon  $0,212 \mu\text{m}$ .<sup>68</sup> Ce fut complété par des mesure similaires avec M. Dabrowski<sup>69</sup> sur des grains de mastic, et donna ces fameux diagrammes de positions aléatoires, que l'on peut trouver dans le livre de Jean Perrin. (Voir figure 3).

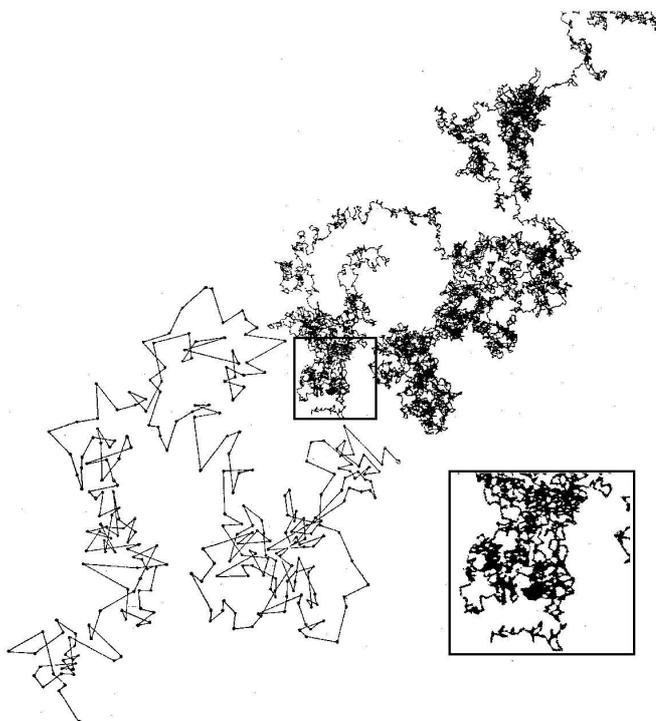


Figure 3: *Mouvement brownien. En bas à gauche : très fort agrandissement, qui montre l'aspect discretisé des enregistrements séquentiels de la position d'une particule en suspension, effectués par Jean Perrin et ses collaborateurs. En bas à droite : agrandissement qui montre l'auto-similarité de la courbe brownienne continue sous-jacente.*

La conclusion fut à “l'exactitude rigoureuse de la formule proposée par Einstein”, et “que quelque complication inconnue ou quelque cause d'erreur systématique ont faussé les résultats de Victor Henri.” Ils en déduisirent une nouvelle valeur moyenne du nombre d'Avogadro,  $\mathcal{N} = 7,15 \times 10^{23}$ . Une belle vérification, enfin, fut celle de “la loi d'irrégularité de Maxwell”, c'est-à-dire de la distribution gaussienne de position (23), dans un plan orthogonal à la gravité.

Jean Perrin ne s'arrêta pas en si bon chemin et se tourna vers le mouvement brownien de rotation. Einstein lui-même ne pensait pas que ses prédictions (38) fussent vérifiables expérimentalement, car les vitesses de rotations, trop grandes, semblaient inobservables. En effet, pour des grains de  $1 \mu\text{m}$  de diamètre, la rotation est de  $100''$  par seconde. Perrin put préparer des sphérules de diamètres très importants, de  $10$  à  $15 \mu\text{m}$ , et pouvant atteindre jusqu'à  $50 \mu\text{m}$ , qu'il réussit à mettre en suspension dans des solutions à 27% d'urée. Pour ceux-ci, la vitesse angulaire tombe à quelques degrés par minute. Ils portaient en outre des inclusions de réfringence un peu différente,

---

Sans hésiter, on admit que la théorie d'Einstein était incomplète ou inexacte. D'autre part, il n'y avait pas lieu de renoncer à placer dans l'agitation moléculaire l'origine du mouvement brownien, puisque je venais de montrer par l'expérience qu'une émulsion diluée se comporte comme un gaz parfait très dense dont les molécules auraient un poids égal à celui des grains de l'émulsion. On se borna donc à supposer qu'il s'était glissé dans les raisonnements d'Einstein quelque hypothèse complémentaire injustifiée.”

<sup>68</sup>M. Chaudesaigues, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **147**, 1044 (1908) ; *Diplôme d'Études*, Paris (1909).

<sup>69</sup>J. Perrin et Dabrowski, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **149**, 477 (1909).

ce qui rendait leur rotation mesurable au microscope ! Il en résulta une vérification spectaculaire de la deuxième formule d'Einstein (38), cette fois pour des grains 100 000 plus lourds que les petits grains de gomme-gutte d'abord étudiés.<sup>70</sup>

On lit dans les notes autobiographiques d'Einstein :

“L'accord de ces considérations avec l'expérience, ainsi que la détermination par Planck de la véritable taille moléculaire à partir de la loi du rayonnement [du corps noir] (à haute température) acheva de convaincre les sceptiques, qui étaient fort nombreux à cette époque (Ostwald, Mach), de la réalité des atomes. L'antipathie de ces savants pour la théorie atomique peut indubitablement être rattachée à leur attitude philosophique positiviste. Ceci est un exemple intéressant du fait que même des savants à l'esprit audacieux et à l'instinct affiné peuvent se trouver bloqués dans l'interprétation des faits par des préjugés philosophiques. Le préjugé -qui n'a en aucune manière disparu entretemps- consiste à croire que les faits peuvent et doivent apporter par eux-mêmes la connaissance scientifique sans libre construction conceptuelle. Une telle méconception n'est possible que parce que l'on ne se rend pas facilement compte de la liberté du choix de ces concepts, qui, à travers leur vérification et un long usage, paraissent comme en relation immédiate avec l'expérience empirique.”

Perrin reçut le prix Nobel en 1926 pour son travail sur le mouvement brownien. Son livre, *Les atomes*, l'un des livres de physique parmi les plus fins écrits au vingtième siècle, contient un postmortem, dans le grand style classique, sur le combat pour établir la réalité des molécules :

“La théorie atomique a triomphé. Nombreux encore naguère, ses adversaires enfin conquis renoncent l'un après l'autre aux défiances qui longtemps furent légitimes et sans doute utiles.”

## 2 Mesures par fluctuations browniennes

Sautons un siècle, et observons comment la théorie des fluctuations browniennes dont l'élaboration a été décrite ci-dessus, trouve aujourd'hui des applications spectaculaires en physique appliquée à la biologie. Nous allons choisir un exemple portant sur la physique de l'ADN.

### 2.1 Micromanipulations de molécules d'ADN

#### 2.1.1 Intérêt de l'ADN pour les physiciens

Les physiciens s'intéressent aujourd'hui à l'ADN pour de nombreuses raisons. Tout d'abord, c'est un polymère remarquable par sa longueur, pouvant atteindre plusieurs centimètres, et sa monodispersité (l'ADN du virus bactériophage- $\lambda$ , par exemple, comporte toujours 48502 paires de bases de séquence identique). L'ADN fournit un sujet de choix en physique des polymères car, facilement façonné par les outils de la biologie moléculaire, il est directement observable et manipulable. Des intercalants fluorescents placés entre paires de bases (tels le bromure d'éthidium) permettent en effet d'observer au microscope et par fluorescence des molécules *individuelles* d'ADN en solution.

#### 2.1.2 Réalisation expérimentale d'une micromanipulation

On peut aussi micromanipuler ces molécules individuellement. Les techniques de micromanipulations de biomolécules isolées se développent considérablement depuis quelques années, grâce à un nombre toujours croissant d'instruments : “pinces” optiques ou magnétiques, microscopes à force atomique, microfibres de verres, ou encore observations sous écoulements hydrodynamiques.

Un exemple récent consiste à tirer sur une molécule unique d'ADN et à mesurer son allongement en fonction de la force, afin de mesurer divers paramètres mécaniques importants de la chaîne d'ADN.

Dans les “pinces magnétiques” (Figure 4), une bille magnétique est placée dans le champ d'un aimant et attirée vers les régions de gradient de champ élevé, et l'on peut déplacer les aimants ou leur imprimer une rotation. Cela permet donc de tirer sur l'ADN ou de le vriller, créant ainsi

<sup>70</sup>J. Perrin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **149**, 549 (1909).

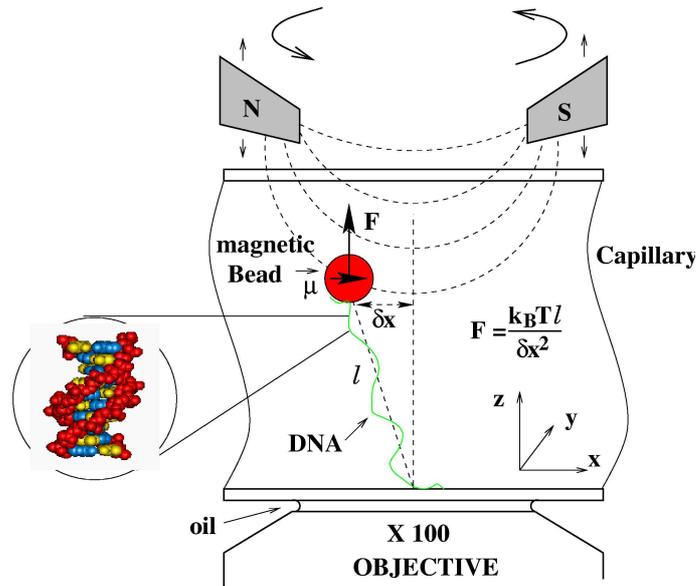


Figure 4: *Micromanipulation d'une molécule d'ADN par des "pinces magnétiques".*

des torsades, ou superenroulements, qui reproduisent une partie des configurations topologiques fonctionnelles.

Donnons un bref aperçu des forces mises en jeu en biologie, et des problèmes spécifiques liés à leur petitesse.

### 2.1.3 Forces d'interaction biologiques et forces d'agitation thermique.

Les forces d'interaction impliquées dans les systèmes biologiques sont typiquement engendrées par les liaisons hydrogène ou ioniques, ainsi que par les interactions de Van der Waals qui structurent acides nucléiques et protéines. Leur ordre de grandeur typique est obtenu en divisant  $k_B T$ , ordre de grandeur du "quantum d'énergie" fourni par l'hydrolyse de l'ATP en ADP<sup>71</sup> (en fait  $10 k_B T$ ), par la taille caractéristique des objets biologiques, de l'ordre du nanomètre (nm). On trouve alors le *picoNewton* :

$$\frac{k_B T}{1 \text{ nm}} = 4 \underset{10^{-12} \text{ N}}{\text{pN}} .$$

Cette force est aussi typiquement celle qu'il faut pour étirer une molécule d'ADN. Extrêmement petite, elle n'est pas facile à détecter avec des dispositifs de mesure classiques.

Les plus petites forces mesurables sont a priori limitées par l'*agitation thermique* de l'instrument de mesure (voir la figure 5). Cette agitation thermique donne lieu à la force stochastique de Langevin vue ci-dessus, dont la valeur dépend du coefficient de friction visqueuse sur l'objet, et aussi de la fenêtre temporelle d'observation. On a :

$$\langle X_{\text{Langevin}}^2 \rangle = 2k_B T 6\pi\eta a \delta f,$$

où  $\eta$  est la viscosité du milieu,  $a$  le rayon d'une bille prise comme exemple, et  $\delta f$  la gamme de fréquence observée. Par exemple, pour  $a = 1,5 \mu\text{m}$ , dans de l'eau (viscosité  $\eta = 10^{-3}$  Poise), la racine de la force carrée moyenne est  $X_{\text{Langevin}} \sim 15 \underset{(10^{-15} \text{ N})}{\text{fN}} \sqrt{Hz}$ , soit 15 femtoNewtons sur une

seconde.

<sup>71</sup>ATP : adénosine triphosphate, carburant biologique universel, fait d'un sucre, la ribose, d'une base, l'adénine, et de trois groupes phosphates ; ADP : adénosine diphosphate, sa version dégradée après perte d'un groupe phosphate sous action enzymatique et libération d'énergie.

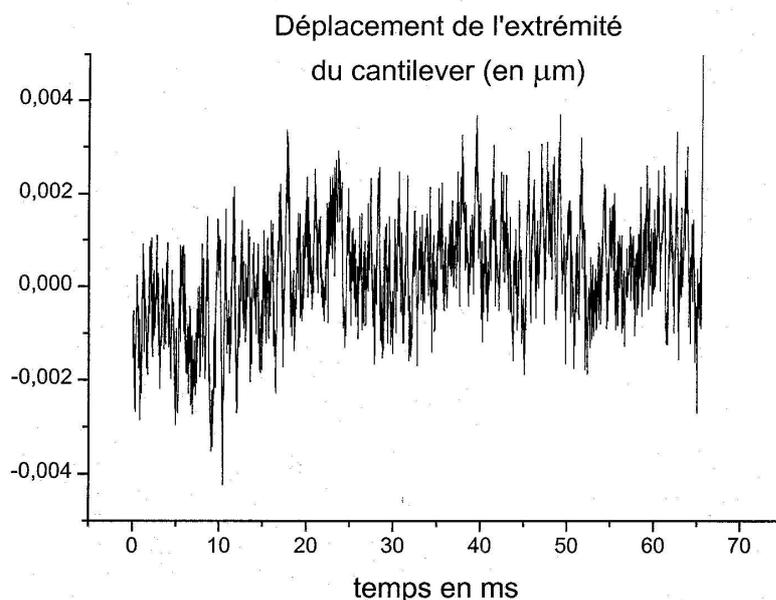


Figure 5: *Enregistrement du mouvement brownien, dans un liquide, de la pointe d'un microscope à force atomique. (Enregistrement fourni gracieusement par Pascal Silberzan, Institut Curie.)*

De manière assez étonnante, ce sont les fluctuations browniennes qui vont être utilisées directement pour la mesure de forces d'origine biologique.

## 2.2 Mesure de force par fluctuations browniennes

Cette technique de mesure de force s'inspire largement de la méthode proposée par Einstein<sup>72</sup> pour mesurer la raideur d'un ressort à l'aide des *fluctuations browniennes*. Lorsque l'on applique en effet une force sur la bille magnétique grâce à un gradient de champ, la molécule étirée et la bille forment un minuscule pendule de longueur  $\ell$  (Figure 4). La bille est animée d'un mouvement brownien, lié à l'agitation thermique des molécules d'eau environnantes. Le petit pendule magnétique est ainsi perturbé par une force de Langevin aléatoire qui l'écarte de sa position d'équilibre. Il est ramené vers celle-ci par la force de traction exercée par l'ADN (figure 6).

Comme nous allons le montrer en détail plus loin, le pendule possède une raideur transverse  $k_{\perp}$  qui est directement reliée à la force de traction  $F$  par  $k_{\perp} = F/\ell$ . Si l'on appelle  $x$  l'écart de la bille par rapport à sa position d'équilibre dans la direction perpendiculaire à la force  $\vec{F}$ , la théorie va nous donner

$$F = k_B T \ell / \langle x^2 \rangle,$$

où  $\langle x^2 \rangle$  représente les fluctuations quadratiques moyennes de  $x$ . Pour mesurer la force de traction sur la molécule d'ADN, il suffit donc de mesurer l'allongement  $\ell$  et les fluctuations quadratiques moyennes  $\langle x^2 \rangle$  ! Cela est très réminiscent de la formule d'Einstein (25), et de la surprise de pouvoir en déduire le nombre d'Avogadro.

Pour mesurer ces fluctuations, il faut suivre les déplacements de la bille pendant un certain temps, comme dans les expériences de Jean Perrin de 1908 sur le mouvement brownien. De nos jours, un programme informatique analyse en temps réel l'image video de la bille observée au microscope et détermine son déplacement dans les trois directions de l'espace avec une précision de l'ordre de 10 nm (figure 6). Cette précision est obtenue par une technique de corrélation d'images. Ce type de mesure brownienne possède divers avantages :

<sup>72</sup>A. Einstein, *Investigations of the Theory of the Brownian Movement*, éd. R. Fürth, trad. A. D. Cowper, Dover Publications, p. 24 (1956).

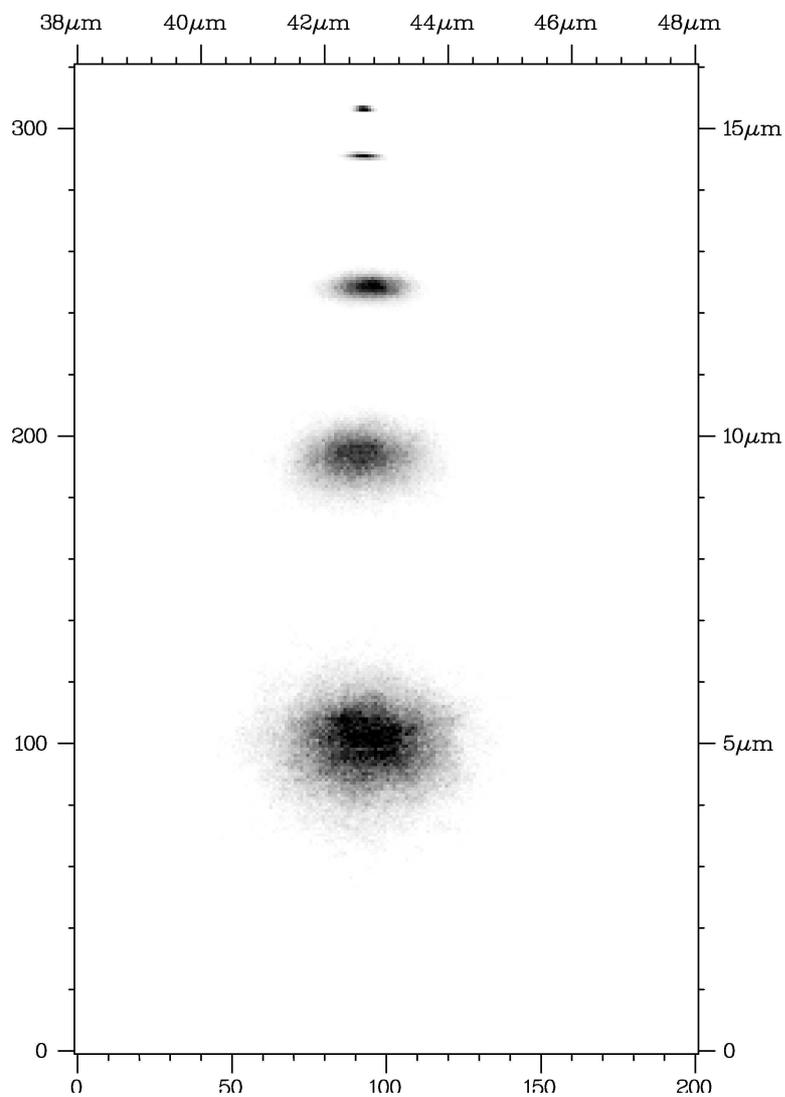


Figure 6: Nuage brownien des positions fluctuantes de la bille dans le plan vertical  $(Ox, Oz)$ , pour différentes forces appliquées. Plus la force est grande, plus la molécule s'étire et plus les fluctuations browniennes sont restreintes. (Enregistrement fourni gracieusement par Vincent Croquette, Laboratoire de physique statistique de l'ENS.)

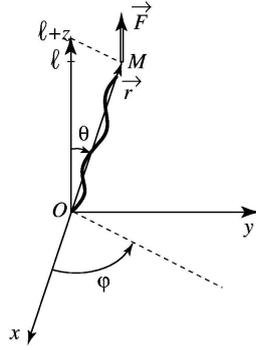


Figure 7: Axe de la chaîne d'ADN fluctuant autour de la position verticale ; l'extrémité  $M$  est déplacée de la position d'équilibre  $(0, 0, \ell)$  en présence de  $F$  vers la position aléatoire  $(x, y, \ell + z)$ .

- calibrage de la force par mesure absolue de fluctuations de positions ;
- absence de contact avec la bille, donc non invasivité ;
- le déplacement  $x$  mesuré pouvant aller du  $\mu\text{m}$  au  $\text{nm}$ , la gamme de forces mesurées va de la dizaine de femtoNewtons à la centaine de picoNewtons.

Son défaut est sa lenteur : pour accumuler suffisamment de fluctuations et avoir une bonne statistique, il faut une minute d'enregistrement pour une force de 1 pN, et plus d'une heure pour 10 fN.

Il nous reste maintenant à décrire la théorie de la mesure par fluctuations browniennes.

## 2.3 Théorie

### 2.3.1 Équilibre et fluctuations

On considère une chaîne d'ADN de longueur au repos  $\ell_0$ , dont une extrémité est fixée à l'origine  $O$ , tandis que l'autre extrémité  $M$  est repérée par  $\vec{OM} = \vec{r}$  (voir la figure 7). Sur l'extrémité de la chaîne s'exerce maintenant une force  $\vec{F}$  dirigée selon l'axe  $Oz$ . À l'équilibre, la chaîne est donc parallèle à l'axe  $Oz$  et s'étire élastiquement jusqu'à une longueur  $\ell$  dépendant de  $F$ . Les fluctuations browniennes, provenant des chocs incessants des molécules de la solution sur la chaîne d'ADN et surtout sur la bille qui lui est attachée, induisent de petits déplacements  $(x, y, z)$  que l'on va pouvoir traiter comme perturbations de la position d'équilibre macroscopique  $(0, 0, \ell)$ . L'extrémité  $M$  est ainsi déplacée de la position d'équilibre  $(0, 0, \ell)$  (en présence de  $F$ ) à la position aléatoire  $(x, y, \ell + z)$ . Soit  $r = |\vec{OM}|$  la distance radiale entre les extrémités de la chaîne. Par élasticité, celle-ci développe une *force radiale de rappel*  $F_r(r)$ . À l'équilibre, on a donc :  $F_r(\ell) = F$ , où  $F$  est la force extérieure expérimentalement donnée.

En présence de fluctuations, la distance radiale s'écrit

$$r = [(\ell + z)^2 + x^2 + y^2]^{1/2}, \quad (72)$$

et la force de rappel

$$\vec{F}_r = -\frac{\vec{r}}{r} F_r(r) = \begin{cases} F_{rx} = -\frac{x}{r} F_r(r) \\ F_{ry} = -\frac{y}{r} F_r(r) \\ F_{rz} = -\frac{\ell + z}{r} F_r(r). \end{cases} \quad (73)$$

### 2.3.2 Développements limités

On écrit le développement limité de la distance  $r$  pour  $x, y, z$  très petits devant  $\ell$  :

$$r = [(\ell + z)^2 + x^2 + y^2]^{1/2} = \ell + z + \dots \quad (74)$$

L'ordre de développement linéaire en  $x, y, z$  sera suffisant, et nous nous contentons de noter dorénavant symboliquement par  $+\dots$  tout terme du second ordre (en  $O(x^2, y^2, z^2)$ ) apparaissant dans les développements.

La force radiale de rappel exercée par l'ADN sur la bille, notée  $F_r(r)$ , ne dépend que de la distance radiale  $r$  ; elle a donc pour développement limité d'après (74) :

$$F_r(r) = F_r[\ell + z + \dots] = F_r(\ell) + z \frac{dF_r}{dr}(\ell) + \dots \quad (75)$$

On peut maintenant facilement déterminer les composantes (73) de cette force de rappel en utilisant (74) et (75) :

$$\begin{aligned} F_{rx} &= -\frac{x}{r} F_r(r) = -\frac{x}{\ell} F_r(\ell) + \dots, \\ F_{ry} &= -\frac{y}{r} F_r(r) = -\frac{y}{\ell} F_r(\ell) + \dots, \\ F_{rz} &= -\frac{\ell + z}{r} F_r(r) = -F_r(\ell) - z \frac{dF_r}{dr}(\ell) + \dots. \end{aligned}$$

Remarquons enfin que la force extérieure  $\vec{F} = F \vec{u}_z$  annule exactement au point d'équilibre la partie en  $-F_r(\ell) \vec{u}_z$  de la composante verticale  $F_{rz} \vec{u}_z$  de la force élastique de rappel. Laissant de côté les termes du second ordre, nous sommes amenés par cette analyse à une force de rappel fluctuante résultante sur l'ADN, au premier ordre :

$$\vec{f} = F \vec{u}_z + \vec{F}_r = \begin{cases} -\frac{x}{\ell} F_r(\ell) \\ -\frac{y}{\ell} F_r(\ell) \\ -z \frac{dF_r}{d\ell}(\ell) \end{cases} = -\nabla_{\vec{r}} U. \quad (76)$$

### 2.3.3 Énergie élastique

La beauté de cette approche est que l'on peut déterminer l'énergie élastique emmagasinée dans les fluctuations browniennes de la chaîne d'ADN sans même connaître la forme analytique de la force élastique. Dans ces expressions, il faut bien comprendre que la longueur d'équilibre  $\ell$  est déterminée par la force extérieure, tandis que la force fluctuante (76) est *linéaire* en  $x, y, z$  comme attendu en raison du développement effectué au premier ordre. Une énergie potentielle quadratique  $U$  lui est donc associée par  $\vec{f} = -\nabla_{\vec{r}} U$ , avec l'expression simple :

$$U = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \frac{1}{\ell} F_r(\ell) + \frac{1}{2} z^2 \frac{dF_r}{d\ell}(\ell). \quad (77)$$

### 2.3.4 Constantes de raideur élastiques

On peut écrire l'énergie  $U$  (77) comme celle d'un ressort ou oscillateur harmonique tridimensionnel anisotrope possédant deux constantes de raideur, dont l'une,  $k_{\perp}$ , et l'autre,  $k_{\parallel}$ , correspondent respectivement aux directions perpendiculaire et parallèle à la direction de la force :

$$U = \frac{1}{2} k_{\perp} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} k_{\parallel} z^2, \quad (78)$$

avec

$$\begin{cases} k_{\perp} &= \frac{F_r(\ell)}{\ell}, \\ k_{//} &= \frac{dF_r}{d\ell}(\ell). \end{cases} \quad (79)$$

Comme on peut l'imaginer intuitivement, la constante de raideur transverse, qui s'oppose aux mouvements latéraux de la molécule d'ADN, est plus faible que la constante de raideur longitudinale qui, quant à elle, résiste à l'étirement mécanique de l'ADN.

### 2.3.5 Équipartition de l'énergie

En mécanique statistique *classique*, nous avons vu le résultat important qui concerne l'*équipartition de l'énergie*. Le théorème dit simplement que chaque degré de liberté *quadratique* a pour énergie moyenne exactement  $\frac{1}{2}k_B T$ , où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue. Dans le cas de l'énergie harmonique (78), cela nous donne immédiatement :

$$\frac{1}{2}k_{\perp}\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_{\perp}\langle y^2 \rangle = \frac{1}{2}k_{//}\langle z^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T. \quad (80)$$

On trouve donc finalement, à l'aide de (79)

$$\begin{cases} k_{\perp} &= \frac{F_r(\ell)}{\ell} = \frac{k_B T}{\langle x^2 \rangle}, \\ k_{//} &= \frac{dF_r}{d\ell}(\ell) = \frac{k_B T}{\langle z^2 \rangle}. \end{cases} \quad (81)$$

En raison de la différence de constantes de raideur,  $k_{\perp} < k_{//}$ , les fluctuations de position transverses dominent les fluctuations longitudinales  $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle > \langle z^2 \rangle$ , comme on peut le voir sur la figure 6. On voit par exemple que les fluctuations  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  ou  $\sqrt{\langle z^2 \rangle}$  sont respectivement de l'ordre de  $2\mu\text{m}$  et de moins d' $1\mu\text{m}$  pour le deuxième nuage brownien à partir du bas. Ces fluctuations browniennes sont directement mesurables optiquement, ainsi que l'allongement  $\ell$ , et par les équations (81) elles permettent une mesure directe fort ingénieuse de la force élastique  $F_r(\ell)$  et de sa dérivée  $F_r'(\ell)$  ! On peut alors comparer les résultats expérimentaux aux prédictions de modèles théoriques pour la description statistique des configurations de l'ADN (voir la figure 8).

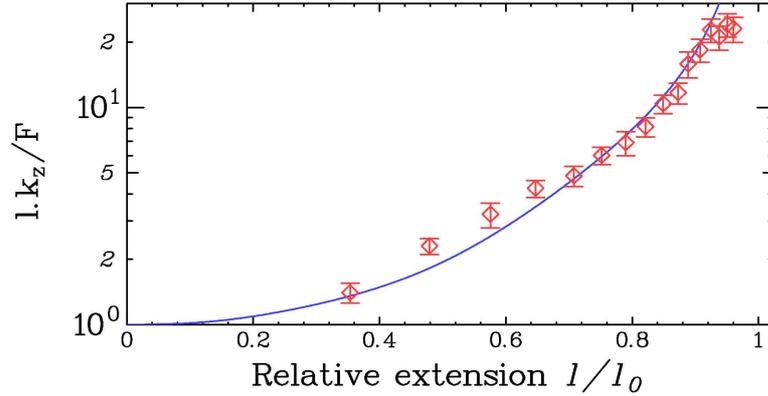


Figure 8: Rapport sans dimension  $\frac{\ell k_z}{F} = \frac{k_{//}}{k_{\perp}} = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle z^2 \rangle} = \frac{\ell}{F_r(\ell)} \frac{dF_r(\ell)}{d\ell}$ , tracé en fonction de l’allongement  $\ell$  de la chaîne d’ADN (rapporté à la longueur maximale  $\ell_0$  de celle-ci). Les points correspondent au rapport des mesures expérimentales des fluctuations quadratiques browniennes transverse  $\langle x^2 \rangle$  et verticale  $\langle z^2 \rangle$ . La courbe est prédite théoriquement à partir de la connaissance de  $F_r(\ell)$ , dans le cadre du modèle de chaîne semi-flexible de l’ADN, dit “du ver”, ou “Worm-like chain model” en anglais. On constate un accord remarquable entre expérience et théorie. (Figure fournie gracieusement par Vincent Croquette.)

### 3 Théorie du potentiel et mouvement brownien

*Et ignem regunt numeri*

#### 3.1 Introduction

##### 3.1.1 Équation de Laplace

La théorie du potentiel concerne les propriétés d’équilibre des corps continus, comme la distribution de charges électrostatiques sur des conducteurs, la distribution de potentiel newtonien dans la théorie classique de la gravitation, la distribution de température dans la théorie de la conduction de la chaleur de Fourier, ou encore la distribution des positions d’une membrane élastique tendue.<sup>73</sup>

Il existe une relation profonde entre la théorie du potentiel et la théorie de la diffusion, donc celle du mouvement brownien.<sup>74</sup> Illustrons la d’abord intuitivement dans le cadre de la théorie de la conduction de la chaleur, due à Fourier.<sup>75</sup>

La température d’un corps,  $u(x, y, z; t)$ , au point  $(x, y, z)$  et à l’instant  $t$ , suit l’équation de diffusion de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u, \quad (82)$$

où, comme dans le cas du mouvement brownien,  $D$  est un coefficient de diffusion, et où  $\Delta$  représente comme auparavant le Laplacien  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , ici en trois dimensions. En général, le Laplacien s’écrit en  $d$  dimensions :

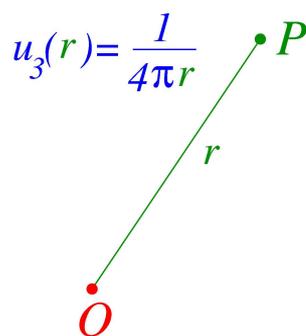
$$\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (83)$$

où les  $x_i$  sont les coordonnées cartésiennes en  $d$  dimensions. Lorsque la température atteint l’équilibre, la dépendance en temps s’efface, et le champ de température est régi par l’équation

<sup>73</sup>On peut se référer à l’ouvrage classique de O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag (1929) ; Dover Books on Advanced Mathematics (1969).

<sup>74</sup>On pourra consulter l’article *Le mouvement brownien et la théorie du potentiel*, de R. Hersch et R. J. Griego, paru en 1977 dans le premier numéro hors série de POUR LA SCIENCE, traduit de SCIENTIFIC AMERICAN, mars 1969.

<sup>75</sup>L’ouvrage majeur de Joseph Fourier, *La théorie analytique de la chaleur*, fut publié en 1822, avec comme devise : *Et ignem regunt numeri* (Les nombres règnent sur le feu).

Figure 9: *Potentiel newtonien en trois dimensions.*

de Laplace :

$$\Delta u = 0. \quad (84)$$

Une telle fonction, dont le Laplacien est nul, est dite *harmonique*.

Cette fonction, le *potentiel*, peut donc être vue comme la solution d'équilibre (à temps infini, donc) d'un processus de diffusion, ce qui est la première relation, élémentaire, que nous rencontrons entre la théorie du potentiel et celle de la diffusion brownienne. Pour spécifier la valeur de la température partout dans l'exemple que nous avons pris, il faut en outre se donner des conditions initiales si l'on part d'une situation hors d'équilibre avec diffusion.

Dans le cas, que nous allons considérer dorénavant, où l'on veut étudier directement l'équilibre et les fonctions harmoniques, ou plus généralement le potentiel, qui lui sont associés, il faut connaître soit la position des sources du potentiel, soit des conditions aux limites sur celui-ci, d'une manière que nous allons préciser.

Se donner la position des sources est naturel dans la théorie bien connue du potentiel newtonien ou coulombien, où les sources de potentiel sont les masses ou les charges électrostatiques. L'utilisation de conditions aux limites sur le potentiel y est aussi possible, et elle apparaît de manière naturelle dans le cas de la conduction de la chaleur et de la distribution de température, où l'on se donne la distribution de température à la surface d'un corps pour en déterminer la distribution interne.

Ces représentations sont mathématiquement équivalentes. Rappelons d'abord les propriétés élémentaires du potentiel newtonien ou coulombien, qui nous seront utiles pour passer aux propriétés plus fines des fonctions harmoniques.

Pour fixer les idées, nous allons adopter le langage familier du potentiel de Newton ou de Coulomb créé par des masses ou des charges électrostatiques, mais les résultats mathématiques ne dépendront évidemment pas de ce choix.

## 3.2 Potentiel newtonien

### 3.2.1 Potentiel créé par une source ponctuelle

Afin de traiter de manière universelle le potentiel, comme celui de la gravitation ou de l'électrostatique, les constantes physiques, comme la constante de gravitation universelle  $G$ , ou la permittivité électrique du vide,  $\varepsilon_0$ , ne sont pas indiquées. En général, nous adopterons le langage électrostatique.

Le potentiel créé en un point  $P$  par une masse ou une charge unité placée à l'origine  $O$  s'écrit, en trois dimensions

$$u_3(r) = \frac{1}{4\pi r}, \quad r = |\vec{OP}|, \quad (85)$$

où  $r$  est la distance entre  $O$  et  $P$  (figure 9).

Le champ de gravitation ou électrique associé est

$$\vec{E}_3(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} u_3(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (86)$$

où  $\vec{r}$  est le vecteur de position relative  $\vec{r} = \vec{OP}$ .

En  $d$  dimensions, potentiel et champ se généralisent en

$$u_d(r) = \frac{1}{(d-2)S_d} \frac{1}{r^{d-2}}, \quad (87)$$

et

$$\vec{E}_d(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} u_d(r) = \frac{1}{S_d} \frac{\vec{r}}{r^d}, \quad (88)$$

où  $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$  est la surface de la sphère unité dans  $\mathbb{R}^d$ .

Le cas bidimensionnel est plus compliqué, et conduit à un potentiel logarithmique qui s'écrit

$$u_2(r) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}, \quad (89)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} u_2(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{r}}{r^2}. \quad (90)$$

### 3.2.2 Équation de Laplace et distribution de Dirac

Le Laplacien du potentiel  $u_d(r)$  ci-dessus s'annule identiquement partout dans l'espace, sauf à l'origine :  $\Delta u_d(r) = 0$ ,  $r \neq 0$ . En  $\vec{r} = \vec{0}$ , il est divergent (infini), et sa valeur est donnée par la théorie des distributions. Plus précisément, on a

$$\Delta u_d(r) = \frac{1}{(d-2)S_d} \Delta \frac{1}{r^{d-2}} = -\delta^d(\vec{r}), \quad (91)$$

où  $\delta^d(\vec{r})$  est la distribution de Dirac en  $d$  dimensions, nulle partout sauf à l'origine  $\vec{r} = \vec{0}$ , où elle est singulière (infinie). Cette divergence est telle que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{r}) \delta^d(\vec{r}) d^d r = f(\vec{0}) \quad (92)$$

est concentrée sur la valeur à l'origine de toute fonction test  $f(\vec{r})$ .

L'équation (91) est une équation de Poisson, où le second terme représente la densité de masse ou de charge, source du potentiel. Dans le cas du potentiel (85), (87) ou (89), cette source est ponctuelle, d'où l'apparition d'une densité singulière.

Dans l'approche élémentaire que nous suivons, nous n'aurons pas a priori recours à ce formalisme. Nous allons plutôt suivre la voie élémentaire qui utilise le théorème de Gauss.<sup>76</sup>

### 3.2.3 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss énonce que le flux du champ électrique à travers toute surface fermée  $\Sigma$  est égal à la masse, ou à la charge totale  $Q(\Sigma)$  enfermée par la surface :

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q(\Sigma). \quad (93)$$

Ce théorème se démontre en deux étapes. Par linéarité, on peut se ramener au cas d'une charge ponctuelle, le cas d'une distribution de charges se traitant en additionnant les champs créés par celles-ci. En effet, si chacun de ces champs satisfait au théorème de Gauss, leur somme le fera aussi.

Ensuite, pour une charge ponctuelle enclose par la surface, on remarque que le flux de  $\vec{E}$  est invariant lorsque l'on déforme la surface  $\Sigma$  sans croiser la charge.<sup>77</sup> On se ramène alors à une surface sphérique concentrique à la charge, pour laquelle le théorème de Gauss est évident. En effet, en raison de la forme (86) du champ en  $1/r^2$  à symétrie sphérique, l'intégrale (93) sur une sphère de rayon  $r$  est identique à la charge.

Le théorème de Gauss se généralise de manière immédiate en toute dimension.

<sup>76</sup>O. D. Kellogg, *op. cit.*

<sup>77</sup>On a, par le théorème de Green-Ostrogradski,  $\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} - \int_{\Sigma'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{E} d^3 v = - \int_{\mathcal{D}} \Delta u d^3 v = 0$ , où  $\mathcal{D}$  est le domaine situé entre les deux surfaces, et  $u$  le potentiel. En effet, on a les identités  $\vec{E} = -\vec{\nabla} u$  et  $\operatorname{div}(\vec{\nabla} u) = \Delta u = 0$ , car  $u$  est harmonique dans le domaine  $\mathcal{D}$  dépourvu de charges.

### 3.2.4 Potentiel créé par une sphère

Considérons une sphère  $\mathcal{S}(a)$  centrée à l'origine  $O$ , et de rayon  $a$ . Imaginons qu'elle porte une charge  $Q$  répartie uniformément sur sa surface.

Le champ associé  $\vec{E}(r)$  est à symétrie sphérique et radial. Il satisfait au théorème de Gauss (93). Si l'on choisit la surface  $\Sigma$  comme une sphère  $\mathcal{S}(r)$  centrée en  $O$ , de rayon  $r > a$ , et donc extérieure à  $\mathcal{S}(a)$ , on a  $Q(\Sigma) = Q$ , et le flux de  $\vec{E}(r)$  à travers  $\Sigma$  est simplement, par symétrie sphérique,  $E(r)4\pi r^2 = Q$ . On en déduit que  $E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$  est le même que le champ qui serait créé par la charge si elle était concentrée au centre de la sphère. Si la surface  $\Sigma$  est choisie comme une sphère  $\mathcal{S}(r)$  de rayon  $r < a$  intérieure à  $\mathcal{S}(a)$ ,  $Q(\Sigma) = 0$ , et le flux (93) est donc nul. Par symétrie, on en déduit que le champ  $\vec{E}$  est nul partout à l'intérieur.

Soit maintenant  $u_{\mathcal{S}}(P)$  le potentiel créé en un point  $P$  quelconque par la même sphère  $\mathcal{S}(a)$  de rayon  $a$  et de charge totale  $Q$ , répartie uniformément en surface. Ce potentiel est à symétrie sphérique comme son champ associé. À l'extérieur, celui-ci est le même que celui d'une charge ponctuelle  $Q$  située au centre, tandis qu'à l'intérieur il est identiquement nul. Le potentiel est donc à l'extérieur celui, (85), créé par la charge ponctuelle située au centre de la sphère, tandis qu'à l'intérieur il est constant, et égal à sa valeur au bord par continuité. D'où sa forme

$$u_{\mathcal{S}}(P) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \vartheta(r - a) + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{a} \vartheta(a - r), \quad r = |\vec{OP}|, \tag{94}$$

où  $\vartheta$  est la distribution de Heaviside  $\vartheta(x > 0) = 1$ ,  $\vartheta(x < 0) = 0$ ,  $\vartheta(0) = 1/2$ .

### 3.3 Fonctions harmoniques et théorème de la moyenne

#### 3.3.1 Théorèmes de la moyenne arithmétique de Gauss

La propriété que deux corps ou deux charges s'attirent mutuellement avec des forces égales et opposées, se reflète dans le potentiel. En effet, celui-ci est symétrique par rapport aux coordonnées des deux points, de sorte que le potentiel en  $P$  d'une charge  $Q$  placée en  $S$  est le même que le potentiel en  $S$  d'une charge  $Q$  placée en  $P$ . De ce simple fait découlent des théorèmes d'applications importantes. Nous dérivons deux d'entre eux, connus sous le nom de théorèmes de la moyenne arithmétique de Gauss.<sup>78</sup>

Le potentiel

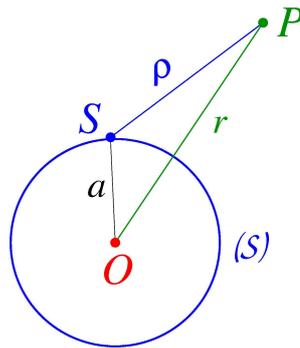


Figure 10: Potentiel newtonien (95) créé par une sphère de rayon  $a$ , uniformément chargée.

$$u_{\mathcal{S}}(P) = \frac{Q}{4\pi a^2} \int_{\mathcal{S}} \frac{d^2 S}{4\pi \rho}, \quad \rho = |SP| \tag{95}$$

est celui créé, en un point d'observation  $P$ , par l'ensemble des points courants  $S$  de la surface d'une sphère  $\mathcal{S}$  de rayon  $a$ , portant une densité de charge surfacique uniforme  $\frac{Q}{4\pi a^2}$  (voir figure 10). Nous

<sup>78</sup>O. D. Kellogg, *op. cit.*

venons de voir en (94) qu'à l'extérieur de la sphère, il est égal à  $\frac{Q}{4\pi r}$ , où  $r$  est la distance  $r = |OP|$  de  $P$  au centre  $O$  de la sphère, tandis qu'à l'intérieur il est constant et vaut  $\frac{Q}{4\pi a}$ .

Mais nous voyons par la symétrie d'échange dont nous venons de parler, qu'il peut être aussi interprété comme la moyenne arithmétique sur la surface de la sphère du potentiel créé par la même charge  $Q$ , cette fois placée en  $P$ .

Les équations (94) (95) ont donc l'interprétation suivante :

- a) la moyenne sur la surface d'une sphère du potentiel créé par une charge située *hors* de la sphère, à la distance  $r$  du centre de celle-ci, est égale à la valeur (en  $1/r$ ) de ce potentiel au centre de la sphère ; et
- b) la moyenne sur la surface d'une sphère du potentiel créé par une charge en position quelconque à l'*intérieur* de la sphère, est égale à la valeur (en  $1/a$ ) de ce potentiel sur la sphère, après concentration de la charge au centre de la sphère.

Supposons maintenant que nous ayons un ensemble de charges placées soit toutes à l'extérieur de la sphère, soit toutes à l'intérieur. En sommant les résultats ci-dessus pour chaque charge élémentaire, on trouve les deux généralisations suivantes :

- a) **Théorème de Gauss de la moyenne arithmétique** : la moyenne sur la surface d'une sphère du potentiel créé par des charges situées entièrement hors de la sphère est égale à la valeur du potentiel au centre ;
- b) **Second théorème de la moyenne** : la moyenne sur la surface d'une sphère du potentiel créé par des charges situées entièrement à l'intérieur de la sphère, est indépendante de leur distribution à l'intérieur de la sphère, et est égale à leur charge totale divisée par le rayon de la sphère.<sup>79</sup>

### 3.3.2 Fonctions harmoniques

Revenons enfin à nos fonctions harmoniques, et considérons  $u$  satisfaisant la condition  $\Delta u = 0$  dans un certain domaine  $\mathcal{D}$ . Une telle fonction harmonique peut être représentée comme le potentiel créé à l'intérieur du domaine  $\mathcal{D}$  par une distribution de charges toutes extérieures à  $\mathcal{D}$ . Nous pouvons donc lui appliquer le premier théorème de Gauss, et énoncer le *théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques* :

La moyenne d'une fonction harmonique  $u$  sur une sphère  $\mathcal{S}$  centrée en un point  $P$  quelconque est égale à la valeur de  $u$  au centre  $P$ . Soit par exemple en trois dimensions :

$$u(P) = \int_{\mathcal{S}} u(S) \frac{d^2 S}{4\pi a^2}, \quad (96)$$

où  $a$  est le rayon de la sphère ; le théorème se généralise en toute dimension.

La réciproque est également vraie : une fonction vérifiant le théorème de la moyenne pour toute sphère appartenant à un domaine, est harmonique dans ce domaine. Ce théorème va être la clé de la relation entre théorie du potentiel et mouvement brownien.<sup>80</sup>

<sup>79</sup>On trouve le premier théorème dans les oeuvres complètes de Gauss, *Allgemeine Lehrsätze*, vol. V, p. 222. Le second théorème, moins usuel, s'y trouve aussi.

<sup>80</sup>Une démonstration du théorème de la moyenne peut être faite par analyse vectorielle. On écrit la moyenne  $\langle u \rangle_{\mathcal{S}}$  de  $u$  sur la surface de la  $(d-1)$ -sphère  $\mathcal{S}$  de rayon  $a$  dans  $\mathbb{R}^d$ , comme le flux du vecteur  $u(\vec{r})\vec{r}/r^d$  sur la surface de cette sphère :

$$\langle u \rangle_{\mathcal{S}} = \frac{1}{S_d a^{d-1}} \int_{\mathcal{S}} u(S) d^{d-1} S = \frac{1}{S_d} \int_{\mathcal{S}} u(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^d} \cdot \vec{n} d^{d-1} S = - \int_{\mathcal{S}} u(\vec{r}) \vec{\nabla} u_d(r) \cdot \vec{n} d^{d-1} S, \quad (97)$$

où  $S_d$  est l'aire de la sphère unité,  $\vec{n}$  un vecteur unité normal à la surface de la sphère, dirigé vers l'extérieur de celle-ci, et où l'on a utilisé (88). On utilise alors le théorème de Green dans le volume  $\mathcal{D}$  intérieur à la sphère :

$$\int_{\mathcal{D}} [u_d(r) \Delta u(\vec{r}) - u(\vec{r}) \Delta u_d(r)] d^d r = \int_{\mathcal{S}} [u_d(r) \vec{\nabla} u(\vec{r}) - u(\vec{r}) \vec{\nabla} u_d(r)] \cdot \vec{n} d^{d-1} S. \quad (98)$$

On a  $\Delta u(\vec{r}) = 0$ , puisque  $u$  est harmonique, et d'après (91),  $\Delta u_d(r) = -\delta^d(\vec{r})$ . Grâce à la définition (92) de la distribution de Dirac et par substitution de (97) dans (98), il vient donc, :

$$u(0) = \langle u \rangle_{\mathcal{S}} + \int_{\mathcal{S}} [u_d(r) \vec{\nabla} u(\vec{r})] \cdot \vec{n} d^{d-1} S. \quad (99)$$

### 3.4 Le problème de Dirichlet

Un problème canonique de la théorie du potentiel est en effet celui de Dirichlet. On y considère un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  et sa frontière  $\partial\mathcal{D}$ . Le potentiel  $u$  est donné sur la frontière comme égal à une fonction continue donnée  $f$  :

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}, \quad (102)$$

$$u = f \text{ sur } \partial\mathcal{D}. \quad (103)$$

Dans le cas de la conduction de la chaleur par exemple, résoudre le problème de Dirichlet revient à se donner la distribution  $f$  des températures le long de la frontière  $\partial\mathcal{D}$  d'un corps conducteur  $\mathcal{D}$ , et à déterminer la température d'équilibre à l'intérieur de  $\mathcal{D}$ .

C'est ici qu'intervient le mouvement brownien, qui va fournir une représentation entièrement probabiliste de cette solution.

### 3.5 Relation entre théorie du potentiel et mouvement brownien

#### 3.5.1 Potentiel newtonien et densité de probabilité

Une première relation, qui contient en germe toutes les autres, est obtenue simplement en considérant la densité de probabilité gaussienne (23).<sup>81</sup> Rappelons que celle-ci décrit la densité de probabilité de trouver une particule brownienne en un point  $\vec{r}$  au temps  $t$ , sachant que la particule est à l'origine au temps  $t = 0$ . En  $d$  dimensions, la formule (23) se généralise en

$$P(\vec{r}; t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right), \quad (104)$$

où  $r$  est la distance à l'origine.

En intégrant  $P(\vec{r}; t)$  sur le temps  $t$  on trouve

$$D \int_0^{+\infty} P(\vec{r}; t) dt = \frac{1}{(d-2)S_d} \frac{1}{r^{d-2}} = u_d(r). \quad (105)$$

Pour un coefficient de diffusion unité,  $D = 1$ , la densité de probabilité brownienne totale, intégrée sur le temps, d'arriver en  $\vec{r}$  est donc exactement égale au potentiel newtonien créé en  $\vec{r}$  par une masse ou charge unité.

Venons en maintenant au problème plus général de Dirichlet.

#### 3.5.2 Marches aléatoires discrètes et problème de Dirichlet

Cette relation remonte en fait aux années 1920 avec les travaux de Phillips et Wiener,<sup>82</sup> et de Courant, Friedrichs et Lewy.<sup>83</sup> Ils obtinrent une représentation probabiliste de la solution du problème de Dirichlet (102) (103), sous la forme d'une séquence approximative de marches au hasard sur le réseau cubique  $d$ -dimensionnel  $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ , de maille  $\varepsilon$ .

Plus précisément, on considère les marches au hasard  $w = \{w_n, n \in \mathbb{N}\}$  sur le réseau  $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ , à temps discrets entiers  $n = 0, 1, 2, \dots$ , partant toutes du point initial  $w_0 = P$  et diffusant vers

En tenant compte de la constance du potentiel newtonien,  $u_d(r) = u_d(a) = \frac{1}{(d-2)S_d a^{d-2}}$ , à la surface de la sphère, la dernière intégrale de flux est transformée en intégrale de volume et vaut

$$u_d(a) \int_S \vec{\nabla} u(\vec{r}) \cdot \vec{n} d^{d-1}S = u_d(a) \int_{\mathcal{D}} \Delta u(\vec{r}) d^d r = 0, \quad (100)$$

car  $u$  est harmonique par hypothèse. Nous avons donc obtenu le théorème de la moyenne attendu :

$$\langle u \rangle_S = u(0). \quad (101)$$

<sup>81</sup>On pourra consulter à ce sujet le petit livre de K. L. Chung, *Green, Brown, and Probability & Brownian Motion on the Line*, World Scientific, Singapore (2002).

<sup>82</sup>H. B. Phillips et N. Wiener, *J. Math. Phys.*, **2**, pp. 105-124 (1923).

<sup>83</sup>R. Courant, K. Friedrichs et K. Lewy, *Math. Ann.*, **1000**, pp. 37-74 (1928).

la frontière. Quand les marcheurs atteignent la frontière, on mesure la valeur de la fonction de frontière  $f$  au point atteint. On répète l'opération et on prend donc ainsi la *moyenne* des valeurs de la fonction de frontière  $f$  sur tous les points de première atteinte de cette frontière par les marcheurs aléatoires partis de  $P$ .

On peut écrire formellement cette opération de moyenne comme

$$u_\varepsilon(P) = \sum_{\{w: P \mapsto \partial\mathcal{D}\}} f(w_{\tau_{\mathcal{D}}}) \quad (106)$$

où la somme porte sur toutes les marches au hasard  $w = \{w_n, n \in \mathbb{N}\}$  sur le réseau  $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ , à temps discrets entiers  $n = 0, 1, 2, \dots$ , partant du point initial  $w_0 = P$  et diffusant vers la frontière. Dans (106),  $\tau_{\mathcal{D}}$  est le premier instant d'atteinte de la frontière  $\partial\mathcal{D}$  par le marcheur aléatoire, et  $w_{\tau_{\mathcal{D}}}$  sa position sur la frontière à cet instant. Cette somme doit être normalisée de manière à être une mesure de probabilité sur les marches discrètes.

Pour avoir le résultat dans le continu, on doit ensuite prendre la limite de la maille  $\varepsilon$  du réseau tendant vers 0. Le résultat  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(P) = u(P)$  est alors la valeur de  $u$  au point  $P$ , solution du problème de Dirichlet dans  $\mathbb{R}^d$  !

Dans le langage de la théorie de la chaleur, la température au point  $P$  est la moyenne des températures sur la frontière, relevées après avoir *marché au hasard* vers celle-ci !

En mathématiques, une notation standard de cette moyenne (106) est

$$u_\varepsilon(P) = \int f(w_{\tau_D}) \Pi_P^\varepsilon(dw), \quad (107)$$

où  $\Pi_P^\varepsilon$  est la mesure de probabilité sur les marches discrètes dans  $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ , partant de  $P$ .

### 3.5.3 Norbert Wiener

En 1923, Norbert Wiener, dans un article fondamental intitulé "Differential space",<sup>84</sup> construisit directement une mesure de probabilité sur les chemins browniens continus dans l'espace  $\mathbb{R}^d$ . Il connaissait la théorie d'Einstein depuis sa visite à Cambridge en 1913. IL était venu, à 19 ans, pour étudier la logique avec Bertrand Russell, mais celui-ci lui suggéra d'aller écouter le mathématicien Hardy et de lire Einstein. L'idée de base fut de construire directement sur l'espace des fonctions continues d'une variable réelle (représentant la position en fonction du temps) une mesure de probabilité telle que les accroissements de position sur des intervalles de temps disjoints aient une distribution de probabilité gaussienne comme en (23).

La mesure ainsi construite s'appelle *mesure de Wiener* et l'intégrale par rapport à cette mesure *moyenne de Wiener*. La notation en est ici  $\mathcal{W}(dw)$ , et plus précisément  $\mathcal{W}_P(dw)$  pour les mouvements browniens  $w$  issus de  $P$ . Elle définit une limite continue pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  de la mesure  $\Pi^\varepsilon(dw)$  sur les marches aléatoires sur le réseau discret  $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ .

Une fois la construction faite, Wiener vérifie que la probabilité de dérivabilité de la position par rapport à  $t$  est nulle, et que le support de la mesure est donné par des fonctions höldériennes (d'ordre au moins  $1/2 - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ .)

Dans une étude écrite en 1964 sur Wiener et l'intégration fonctionnelle, Mark Kac met en avant la profonde originalité de Wiener pour l'époque, et en contrepartie, la difficulté pour les mathématiciens d'alors de comprendre son approche : "Only Paul Lévy in France, who had himself been thinking along similar lines, fully appreciated their significance."<sup>85</sup>

L'étape suivante fut en effet l'oeuvre de Paul Lévy sur le mouvement brownien, avec le premier grand ouvrage sur la question, *Processus stochastiques et mouvement brownien* (1948).<sup>86</sup> Depuis, l'efflorescence du sujet a été telle que l'on ne peut qu'en faire une citation très partielle, et nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article d'introduction de J.-F. Le Gall pour une première entrée

<sup>84</sup>N. Wiener, *J. Math. Phys.*, **2**, pp. 131-174 (1923) ; voir aussi R. E. A. C. Paley et N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **19**, New-York (1934).

<sup>85</sup>M. Kac, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72**, pp. 52-68 (1964).

<sup>86</sup>Paul Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris (1965).

dans le monde brownien mathématique,<sup>87</sup> et au livre de D. Revuz et M. Yor pour un séjour plus prolongé.<sup>88</sup>

### 3.5.4 S. Kakutani

L'existence de la mesure et de l'intégrale de Wiener rendit possible un progrès très important, effectué en 1944-45 par S. Kakutani.<sup>89</sup> Il montra que la substitution de l'intégrale avec la mesure de Wiener  $\mathcal{W}$  à la formule (107) avec la mesure discrète  $\Pi^\varepsilon$  résolvait le problème de Dirichlet dans  $\mathbb{R}^d$ . On a donc la formule de Kakutani

$$u(P) = \int f(w_{\tau_D}) \mathcal{W}_P(dw). \quad (108)$$

Ainsi, le potentiel en un point  $P$  quelconque est donné par la moyenne des potentiels tirés au hasard sur la frontière par un mouvement brownien issu de  $P$  (figure 11).

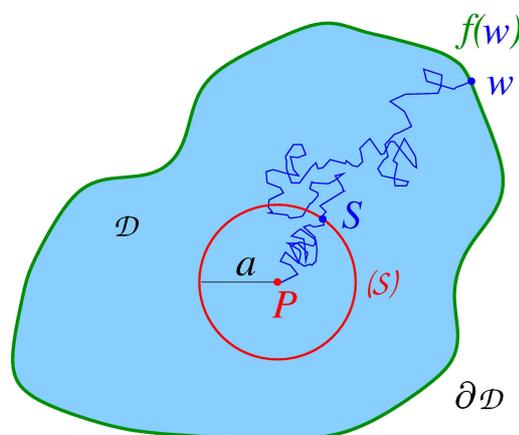


Figure 11: Problème de Dirichlet dans le domaine  $\mathcal{D}$ , et sa représentation brownienne. Le point  $w = w_{\tau_D}$  est le point de premier contact du mouvement brownien issu de  $P$  avec le bord  $\partial\mathcal{D}$ , atteint à l'instant  $\tau_D$  de première sortie du domaine  $\mathcal{D}$ . Le point  $S$  est le point de premier passage à travers la surface de la sphère  $S$ .

Nous donnons dans ce qui suit une démonstration élémentaire de ce résultat.

### 3.5.5 Démonstration

La quantité  $u(P)$  définie par l'équation (108) porte, en théorie des probabilités, le nom d'*espérance mathématique* associée au point  $P$ , car elle représente le résultat espéré d'un tirage au sort d'une valeur de  $f$  sur le bord, par un processus de diffusion brownien issu de  $P$ .

Nous voulons vérifier que cette espérance satisfait aux deux conditions (102) et (103).

La seconde condition est facile à vérifier : si le point  $P$  est sur la frontière  $\partial\mathcal{D}$ , tout mouvement brownien  $w$  issu de  $P$  est arrêté immédiatement sur le bord en  $w_{\tau_D} = P$ , donc  $u(P) = f(P)$  pour  $P$  sur  $\partial\mathcal{D}$ , comme attendu.

En outre, si le mouvement brownien part d'un point  $P$  intérieur, proche d'un point  $P_0$  de la frontière, il est (presque) certain (au sens des probabilités) que ce mouvement atteindra la frontière

<sup>87</sup>J.-F. Le Gall, *Introduction au mouvement brownien*, Journées annuelles de la Société Mathématique de France, 28 janvier 1989, trois exposés sur le mouvement brownien (J.-F. Le Gall : *supra*, G. Ben Arous : *Grandes déviations et noyau de la chaleur*, B. Duplantier : *Le mouvement brownien en physique, les polymères et leur relation avec les phénomènes critiques*).

<sup>88</sup>D. Revuz et M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Berlin-Heidelberg : Springer (1991) ; 2ème édition 1994.

<sup>89</sup>S. Kakutani, *Proc. Imp. Acad. Japan*, **20**, pp. 706-714 (1944).

dans un voisinage de  $P_0$ , et que l'espérance associée  $u(P)$  sera proche de la valeur  $f(P_0)$  de  $f$  en  $P_0$ . Ainsi, la solution de Kakutani a de bonnes propriétés de régularité au voisinage du bord, à condition que celui-ci soit d'une géométrie suffisamment régulière, et que la "température" au bord,  $f$ , soit une fonction continue.

La continuité de l'espérance  $u$  par rapport au point de départ,  $P$ , du mouvement brownien est également intuitivement claire : un faible déplacement de  $P$  modifiera peu l'ensemble des trajectoires browniennes diffusant à partir de  $P$ , et leur exploration ultérieure de la frontière.

Nous allons maintenant établir la première propriété, (102), pour l'espérance  $u(P)$  (108) d'être une fonction harmonique, en montrant qu'elle satisfait à la propriété équivalente (96) de moyenne sur toute sphère centrée en  $P$ .

On trace donc une sphère  $\mathcal{S}$  centrée en  $P$ , de rayon  $a$ , et contenue à l'intérieur du domaine  $\mathcal{D}$  (figure 11). Il s'agit maintenant de montrer que l'espérance brownienne  $u(P)$  obtenue en partant de  $P$  est égale à la moyenne des espérances browniennes  $u(S)$  obtenues en partant de points quelconques  $S$  situés à la surface de la sphère  $\mathcal{S}$ .

Un mouvement brownien, pour atteindre le bord  $\partial\mathcal{D}$  du domaine, doit traverser la sphère  $\mathcal{S}$  au moins une fois. Appelons  $S$  le point de premier passage à travers la sphère (figure 11), et  $u(P/S)$  l'espérance obtenue pour tous les mouvements browniens issus de  $P$  qui, lorsqu'ils traversent pour la première fois  $\mathcal{S}$ , le font au point  $S$ .

Comme pour le mouvement brownien, il n'y a pas de direction préférentielle, chaque point de  $\mathcal{S}$  peut être rencontré en premier de manière équiprobable. Or il faut que le mouvement traverse la sphère. On fractionne la moyenne pour les mouvements issus de  $P$  en deux étapes : choix du point de premier passage  $S$ , et diffusion via  $S$ , avec espérance  $u(P/S)$ . Par moyenne des moyennes, on a donc le résultat que  $u(P)$  doit être égal à la moyenne des  $u(P/S)$  sur la sphère, soit en termes mathématiques :

$$u(P) = \int_{\mathcal{S}} u(P/S) \frac{d^2S}{4\pi a^2}. \quad (109)$$

Il reste à montrer que l'espérance  $u(P/S)$ , obtenue en partant de  $P$  et en passant par  $S$ , est la même que l'espérance  $u(S)$ , obtenue en partant simplement de  $S$  sur la sphère. C'est ici qu'intervient une propriété très importante du mouvement brownien : le mouvement à un instant  $t$  ne dépend que de la position à cet instant, et non du mouvement antérieur. Il s'agit, en quelque sorte, d'une perte de mémoire absolue, où seuls comptent l'instant et la position présents. Le mouvement brownien est dit *markovien*. En théorie des probabilités, on parle ainsi de manière générale de *processus de Markov* lorsque la dynamique future d'un processus n'est pas influencée par ses états antérieurs. Le comportement de la particule brownienne partant de  $S$ , ou passant par  $S$ , sachant qu'elle est partie de  $P$ , ne diffèrent ainsi pas. Il s'ensuit que  $u(P/S) = u(S)$ , ce qui achève la preuve du théorème de la moyenne (96).

### 3.6 Propriétés de récurrence du mouvement brownien

Nous allons donner une illustration d'une propriété probabiliste non triviale du mouvement brownien, qui se déduit aisément de la théorie du potentiel. Il s'agit de la propriété de *récurrence* du mouvement brownien.

#### 3.6.1 Mouvement brownien en une dimension

Plaçons nous d'abord en une dimension sur la droite réelle  $\mathbb{R}$ , et considérons les points  $x$  du domaine  $\mathcal{D}$  constitué par le segment  $\mathcal{D} = [0, R]$ , où  $R$  est un nombre positif. Cherchons la fonction harmonique  $u(x)$  qui satisfait au problème de Dirichlet simple :  $u(0) = 0$ ,  $u(R) = 1$ . En une dimension, le Laplacien (83) est simplement la dérivée seconde, et l'équation harmonique (102) devient  $d^2u(x)/dx^2 = 0$ . La solution est tout simplement linéaire en  $x$  :  $u(x) = x/R$  ; elle vérifie de manière évidente les conditions aux limites requises.

Venons-en maintenant à la solution de Kakutani du problème de Dirichlet par espérance mathématique brownienne. Le bord  $\partial\mathcal{D}$  du segment  $\mathcal{D} = [0, R]$  est constitué de deux points :

$\partial\mathcal{D} = \{0, R\}$ . La fonction  $f$  apparaissant dans les conditions de Dirichlet (103), prend donc les deux valeurs sur le bord :  $f(0) = 0$ ,  $f(R) = 1$ . D'après le résultat de Kakutani, la valeur  $u(x) = x/R$  de la fonction harmonique  $u$  est la moyenne de la fonction  $f$ , obtenue par tirage au sort par un mouvement brownien issu de  $x$ . Le cas de première sortie brownienne du segment  $\mathcal{D} = [0, R]$  par le point  $x = 0$  donne la valeur  $f = 0$ , et celui par le point  $x = R$ , la valeur  $f = 1$ . L'espérance brownienne de  $f$  est ainsi la probabilité pour le mouvement brownien de sortir pour la première fois du segment  $[0, R]$  par le point  $R$ , plutôt qu'en 0. C'est donc exactement la probabilité d'atteindre  $R$  avant 0 en partant de  $x$ . La probabilité complémentaire d'atteindre 0 avant  $R$  est  $p_R(x) = 1 - u(x) = 1 - x/R$ .

Fixons le point  $x$ , et prenons la limite  $R \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire que le segment  $\mathcal{D}$  devient la demi-droite réelle  $\mathbb{R}^+$ . Nous voyons que  $p_{R \rightarrow \infty}(x) \rightarrow 1$ , et ce pour tout  $x$ . La probabilité  $p_\infty(x)$  est, pour un mouvement brownien issu de  $x$ , celle d'atteindre l'origine 0 avant de partir à l'infini.

Le mouvement brownien, d'où qu'il parte, passe donc par l'origine de manière (quasi-) certaine<sup>90</sup>. Comme les origines, spatiale et temporelle, étaient arbitraires dans notre démonstration, la propriété suivante a été établie : *un mouvement brownien à une dimension visite tout point de l'axe réel, et infiniment souvent*. On dit qu'il est *récurrent*.

Cette propriété n'apparaissait pas comme évidente a priori du côté de la théorie probabiliste. On voit que grâce à la relation avec la théorie du potentiel, elle a été démontrée de manière très simple en résolvant une équation différentielle du second ordre ! Einstein n'aura sans doute pas pensé à ceci dès 1905, quoique...?

Généralisons maintenant en deux, puis  $d$  dimensions, l'étude précédente.

### 3.6.2 Le cas bi-dimensionnel

Cette fois, nous nous plaçons dans le plan, et considérons le domaine annulaire  $\mathcal{D}$ , constitué de l'espace situé entre deux cercles concentriques,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , centrés à l'origine  $O$ , et de rayons respectifs  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , avec  $\rho_1 < \rho_2$ . Le bord du domaine  $\mathcal{D}$  est donc constitué de ces deux cercles,  $\partial\mathcal{D} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . Posons le problème de Dirichlet dans la couronne  $\mathcal{D}$  :

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}, \quad (110)$$

$$u = 0 \text{ sur } \mathcal{C}_1, \quad u = 1 \text{ sur } \mathcal{C}_2. \quad (111)$$

En utilisant le potentiel newtonien bi-dimensionnel  $u_2(r)$  (89), il est facile de voir que la solution du problème de Dirichlet, qui est à symétrie sphérique, vaut à une distance  $r$  du centre :

$$u_2(r; \rho_1, \rho_2) = \frac{u_2(r) - u_2(\rho_1)}{u_2(\rho_2) - u_2(\rho_1)} = \frac{\log r - \log \rho_1}{\log \rho_2 - \log \rho_1}, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho_2. \quad (112)$$

En effet, cette fonction satisfait évidemment à (111), et elle est harmonique dans le domaine annulaire  $\mathcal{D}$ , car le potentiel  $u_2(r)$  (89) l'est (sauf à l'origine, qui n'appartient justement pas à  $\mathcal{D}$ ).

Venons-en maintenant à la représentation de Kakutani de la solution du problème de Dirichlet. D'une manière similaire au cas unidimensionnel vu au paragraphe précédent,  $u_2(r; \rho_1, \rho_2)$  (112) représente la probabilité qu'un mouvement brownien, issu d'un point situé à distance  $r$  du centre, atteigne le cercle extérieur  $\mathcal{C}_2$  avant le cercle intérieur  $\mathcal{C}_1$ .

Comme au paragraphe précédent, fixons alors la distance  $r$  et le cercle intérieur  $\mathcal{C}_1$ , et repoussons le bord extérieur  $\mathcal{C}_2$  à l'infini. En faisant  $\rho_2 \rightarrow \infty$  dans la formule (112), on voit par continuité que la probabilité que le mouvement brownien parte à l'infini est  $u_2(r; \rho_1, \infty) = 0$ , pour tous  $r$  et  $\rho_1$  finis. Par complémentarité, on en conclut que ce mouvement brownien atteint le disque de rayon  $\rho_1$  avec probabilité 1, quel que soit son point de départ en dehors de ce disque. Comme l'instant où

<sup>90</sup>En théorie des probabilités continues, un événement de probabilité égale à 1 est dit être "quasi-certain" ou "vrai presque sûrement", à la différence du langage commun. La raison en est qu'il peut toujours exister, au sens de la théorie de la mesure, et dans le cas d'événements formant un continuum, un ensemble irréductible d'événements, très "têtu" car de mesure nulle, et donc de probabilité zéro, où la prédiction ne se réalise pas. On ne peut ainsi aller au delà de cette description à des ensembles de mesure nulle près.

a lieu ce départ est également arbitraire, tout comme l'origine choisie dans le plan, on en conclut que *le mouvement brownien bidimensionnel visite tout voisinage de tout point infiniment souvent*. Il est donc *récurrent en deux dimensions*, comme en une dimension.

Il est également très intéressant de fixer  $r$  et  $\rho_2$  dans (112), et de prendre la limite d'un voisinage infinitésimal de l'origine, soit  $\rho_1 \rightarrow 0$ . On trouve alors par continuité que  $u_2(r; \rho_1 = 0, \rho_2) = 1$ . La probabilité que le mouvement brownien, parti de la distance à l'origine  $r \neq 0$ , s'éloigne de l'origine à une distance arbitraire  $\rho_2 > r$ , et sans avoir visité l'origine en  $\rho_1 = 0$ , est donc égale à 1. Autrement dit, le brownien, s'il ne part pas de l'origine  $O$ , s'éloigne de cette origine avec probabilité 1, sans jamais pouvoir la visiter.

On en déduit le résultat, apparemment paradoxal, qu'*en deux dimensions le mouvement brownien visite un point donné avec une probabilité nulle, mais qu'il visite son voisinage immédiat infiniment souvent avec probabilité 1 !*

Ce double résultat est dû à la présence dans l'espérance (112) d'une fonction, le logarithme, qui diverge à la fois à courte distance, pour  $\rho_1 \rightarrow 0$ , et à grande distance, pour  $\rho_2 \rightarrow \infty$ . Ceci est particulier à deux dimensions, et annonceur des propriétés exceptionnelles dites d'*invariance conforme* en deux dimensions, qui seront décrites dans la section suivante.

En  $d > 2$  dimensions, une simple loi de puissance gouverne le potentiel newtonien  $u_d(r)$  (87), et une divergence apparaît à courte distance. Nous allons voir les conséquences de cette divergence pour les propriétés de récurrence du mouvement brownien.

Mentionnons cependant que ces propriétés ne constituent que le "sommet de l'iceberg" : le caractère singulier du potentiel à courte distance est la source des propriétés de divergence des théories quantiques des champs, qui ont amené à la création de la *théorie de la renormalisation*, dont les conséquences ont été si fructueuses pour la physique des particules élémentaires et la mécanique statistique.<sup>91</sup> En effet, les intersections de mouvement browniens<sup>92</sup> fournissent le mécanisme géométrique aléatoire qui sous-tend toute théorie des champs en interaction.<sup>93</sup> Cette équivalence a été fondamentale en théorie des polymères,<sup>94</sup> et aussi dans la théorie rigoureuse des transitions de phase de second ordre.<sup>95</sup> Mais "revenons à nos moutons".

### 3.6.3 Le cas $d$ -dimensionnel

Nous sommes maintenant bien armés pour passer au cas  $d$ -dimensionnel, pour  $d > 2$ . Considérons deux hypersphères concentriques,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , centrés à l'origine  $O$ , et de rayons respectifs  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , avec  $\rho_1 < \rho_2$ . Le bord du domaine  $\mathcal{D}$  est donc constitué de ces deux sphères,  $\partial\mathcal{D} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ . Posons le problème de Dirichlet (103)

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}, \quad (113)$$

$$u = 0 \text{ sur } \mathcal{S}_1, \quad u = 1 \text{ sur } \mathcal{S}_2. \quad (114)$$

Là encore, en utilisant cette-fois le potentiel newtonien  $d$ -dimensionnel  $u_d(r)$  (87), il est facile de voir que la solution du problème de Dirichlet, à symétrie sphérique, est à une distance  $r$  du centre :

$$u_d(r; \rho_1, \rho_2) = \frac{u_d(r) - u_d(\rho_1)}{u_d(\rho_2) - u_d(\rho_1)} = \frac{r^{2-d} - \rho_1^{2-d}}{\rho_2^{2-d} - \rho_1^{2-d}}, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho_2. \quad (115)$$

Cette fonction satisfait évidemment à (114) ; elle est harmonique dans le  $d$ -domaine annulaire  $\mathcal{D}$ , car le potentiel  $u_d(r)$  (87) l'est (sauf à l'origine, qui n'appartient pas à  $\mathcal{D}$ ).

<sup>91</sup>On pourra consulter à ce sujet le texte *Renormalization* du Séminaire Poincaré 2002, in B. Duplantier & V. Rivasseau (Éds.), *Poincaré Seminar 2002*, Progress in Mathematical Physics, vol. 30, Birkhäuser, Bâle (2003) ; voir aussi la monographie de J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 4th Edition, Oxford University Press (2002).

<sup>92</sup>G. F. Lawler, *Intersection of Random Walks* (Birkhäuser, Boston, 1991).

<sup>93</sup>K. Symanzyk, in *Local Quantum Theory*, édité par R. Jost (Academic Press, London, New-York (1969)).

<sup>94</sup>P.-G. de Gennes, *Phys. Lett.* **A38**, 339-340 (1972) ; J. des Cloizeaux, *J. de Physique* **36**, 281-291 (1975).

<sup>95</sup>M. Aizenman, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1-4, 886 (1981) ; *Commun. Math. Phys.* **86**, 1-48 (1982) ; D. C. Brydges, J. Fröhlich, and T. Spencer, *Commun. Math. Phys.* **83**, 123-150 (1982) ; G. F. Lawler, *Commun. Math. Phys.* **86**, 539-554 (1982).

Appliquons enfin le résultat probabiliste :  $u_d(r; \rho_1, \rho_2)$  (115) est la probabilité qu'un mouvement brownien, parti d'un point donné à une distance  $r$  du centre, rencontre la sphère extérieure avant la sphère intérieure.

Prenons d'abord dans (115) la limite  $\rho_2 \rightarrow \infty$ , à  $r$  et  $\rho_1$  fixés. Comme la dimension  $d$  est ici supérieure à 2, on a  $\rho_2^{2-d} \rightarrow 0$ . La probabilité pour le mouvement brownien de s'échapper à l'infini,  $u_d(r; \rho_1, \rho_2 \rightarrow \infty)$ , est donc par continuité la limite  $u_d(r; \rho_1, \infty) = 1 - (\rho_1/r)^{d-2}$ . Celle-ci est donc *finie*.

Ce résultat montre qu'à *partir de l'espace à trois dimensions, le mouvement brownien n'est pas récurrent*, car l'espace  $y$  est plus grand qu'en une ou deux dimensions. On dit qu'il est *transient*. Ce résultat, très important en théorie des probabilités, a été obtenu, de manière élégante et simple, par la théorie du potentiel.

La probabilité complémentaire,  $p_d(r; \rho_1, \infty) = 1 - u_d(r; \rho_1, \infty)$ , de toucher le voisinage de l'origine, à distance  $\rho_1 \leq r$ , est donc égale à  $(\rho_1/r)^{d-2}$ . Pour le cas physique usuel,  $d = 3$ , on trouve donc  $p_3(r; \rho_1, \infty) = \rho_1/r$ , pour  $\rho_1 \leq r$ .

On peut généraliser la définition de cette fonction  $p_d(r; \rho_1, \infty)$  à tout l'espace, en lui donnant la valeur 1 à l'intérieur de la sphère de rayon  $\rho_1$ , c'est-à-dire pour  $r \leq \rho_1$ . Cette fonction généralisée est appelée le *potentiel capacitif* de la sphère de rayon  $\rho_1$ . Le potentiel capacitif d'un ensemble  $\mathcal{B}$  est un concept important de la théorie classique du potentiel ; c'est une fonction harmonique en dehors de  $\mathcal{B}$ , égale à 1 à l'intérieur de  $\mathcal{B}$ , et nulle à l'infini. C'est donc la probabilité pour qu'une particule animée d'un mouvement brownien et partant d'un point donné, atteigne  $\mathcal{B}$ .

Les recherches dans ce domaine ont permis de découvrir d'importantes généralisations, à la fois de la théorie du mouvement brownien et de celle du potentiel. Nous avons vu que l'équivalence entre eux reposait sur la propriété de Markov du mouvement brownien. On a pu montrer qu'à tout processus de Markov "standard" on peut associer une théorie du potentiel généralisée.

On voit donc la relation profonde qui existe entre la théorie mathématique du potentiel, inventée au dix-septième siècle par Newton, puis développé par Laplace, Poisson et Green, et le mouvement brownien, observé à la même époque, mais compris seulement au vingtième siècle, grâce à Sutherland, Einstein, Smoluchowski et Langevin en physique, puis Wiener, Lévy et Kakutani en mathématiques.

## 4 La géométrie fine de la courbe brownienne plane

### 4.1 Frontière brownienne

Dans cette dernière partie, nous nous intéressons à la géométrie de la courbe brownienne plane. Par courbe brownienne, ou encore chemin brownien, nous entendons la courbe aléatoire tracée par un mouvement brownien dans le plan. Nous en voyons un représentant typique en figure 1. En particulier, nous allons nous intéresser à la *frontière* de cette courbe. Celle-ci enveloppe l'extérieur de la courbe brownienne. On observe que c'est une courbe extrêmement irrégulière, *fractale* au sens de Mandelbrot (figure 12).<sup>96</sup>

Par des simulations numériques précises, celui-ci conjectura en 1982 que cette frontière était en fait la limite continue d'une marche aléatoire bien particulière, la *marche auto-évitante* (figure 13). Il s'agit là d'un processus où le marcheur aléatoire n'a pas le droit de recouper sa propre trace. Pour la définir, on considère a priori l'ensemble des trajectoires possibles avec recouvrements d'un marcheur aléatoire sur le réseau carré, par exemple, et l'on sélectionne l'infime partie de celles qui n'ont aucun recouvrement avec elles-mêmes.<sup>97</sup>

<sup>96</sup> On peut consulter les ouvrages classiques de Benoît Mandelbrot, *Les objets fractals : forme, hasard et dimension, survol du langage fractal*, Champs, Flammarion (1999), et *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New-York (1982).

<sup>97</sup> Voir les deux monographies : P.-G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell University Press (1979) ; J. des Cloizeaux and G. Jannink, *Polymers in Solution, their Modeling and Structure* (Clarendon, Oxford University Press, 1989).

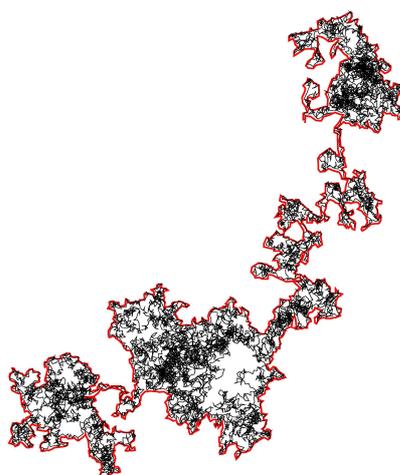


Figure 12: *Frontière ou enveloppe extérieure d'un chemin brownien plan.*

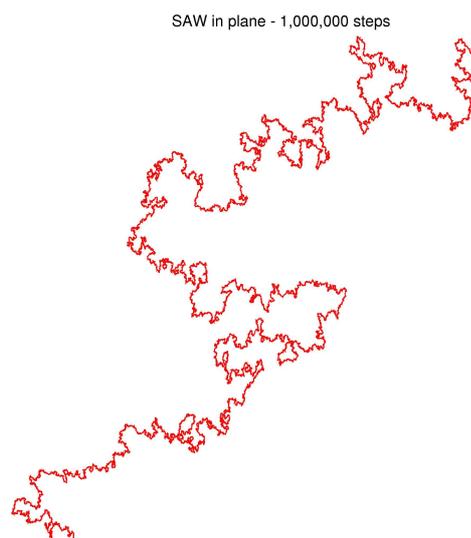


Figure 13: *Une marche aléatoire auto-évitante dans le plan (fournie gracieusement par T. G. Kennedy, University of Arizona).*

Il en résultait la conjecture que la dimension fractale ou de Hausdorff de la frontière brownienne était égale à  $D_H = 4/3$ , comme celle calculée par le physicien néerlandais Bernard Nienhuis en 1982 pour les marches auto-évitantes bi-dimensionnelles.<sup>98</sup> La dimension fractale  $D_H$  est ici définie, d'une manière non rigoureuse, comme suit. On couvre l'objet fractal de taille  $R$  par des petits cercles disjoints de rayon  $\varepsilon$ , et l'on compte le nombre  $n$  de tels cercles. En général, ce nombre croît en fonction de  $R$  et  $\varepsilon$  comme une loi de puissance,  $n \propto (R/\varepsilon)^{D_H}$ . On voit donc que  $D_H$  généralise à des ensembles très irréguliers la notion de dimension euclidienne des ensembles réguliers.

B. Nienhuis s'appuyait sur une représentation de mécanique statistique, dite du gaz de

<sup>98</sup>B. Nienhuis, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1062-1065 (1982); *J. Stat. Phys.* **34**, 731-761 (1984); *Phase Transitions and Critical Phenomena*, édité par C. Domb et J. L. Lebowitz, (Academic Press, London, 1987), Vol. 11.

Coulomb, précurseur des méthodes d'invariance conforme ou de théorie des champs conformes qui allaient faire irruption en 1984 dans la théorie des phénomènes critiques bi-dimensionnels, grâce aux travaux de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov.<sup>99</sup>

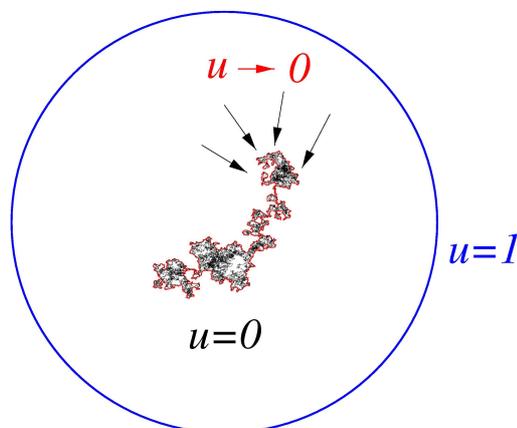


Figure 14: *Problème de Dirichlet associé à un chemin brownien plan. Celui-ci sert d'électrode où le potentiel s'annule.*

La conjecture de Mandelbrot fut prouvée rigoureusement dans le cadre de la théorie probabiliste en 2000 par Greg Lawler, Oded Schramm et Wendelin Werner,<sup>100</sup> à l'aide d'un processus stochastique invariant conforme inventé par Schramm, le SLE (*“Stochastic Loewner Evolution”*), lui-même fondé sur le mouvement brownien.<sup>101</sup>

Une démonstration heuristique de la conjecture de Mandelbrot différente, inspirée par certains résultats probabilistes d'invariance conforme de Lawler et Werner,<sup>102</sup> avait été donnée auparavant en 1998 dans le cadre de la physique théorique, à l'aide du formalisme dit de gravité quantique en théorie des champs conformes.<sup>103</sup>

Nous n'allons pas décrire ici ces travaux en détail<sup>104</sup>, mais plutôt la généralisation de leurs résultats à la géométrie fine du mouvement brownien, et à la nature *multifractale* de sa frontière.

<sup>99</sup>A. A. Belavin, A. M. Polyakov et A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241**, 333-380 (1984). On peut trouver une introduction dans l'ouvrage de C. Itzykson et J.-M. Drouffe, *Théorie statistique des champs*, tome 2, EDP Sciences/CNRS Éditions (2000). Pour les approfondissements, voir par exemple J. L. Cardy, dans *Phase Transitions and Critical Phenomena*, édité par C. Domb et J. L. Lebowitz, (Academic Press, London, 1987), Vol. 11 ; J. L. Cardy, *Conformal Invariance and Statistical Mechanics*, dans “Fields, Strings, and Critical Phenomena”, Les Houches Summer School 1988, édité par É. Brézin et J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam (1990) ; Ph. Di Francesco, P. Mathieu et D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag, New-York (1997).

<sup>100</sup>G. F. Lawler, O. Schramm, et W. Werner, *Acta Math.* **187**, (I) 237-273, (II) 275-308 (2001), arXiv:math.PR/9911084, arXiv:math.PR/0003156; *Ann. Inst. Henri Poincaré* PR **38**, 109-123 (2002), arXiv:math.PR/0005294 ; *Acta Math.* **189**, 179-201 (2002), arXiv:math.PR/0005295; *Math. Res. Lett.* **8**, 401-411 (2001), math.PR/0010165.

<sup>101</sup>O. Schramm, *Israel Jour. Math.* **118**, 221-288 (2000). Le processus  $SLE_\kappa$ , et sa trace, sont engendrés par une équation, dite de Loewner, qui décrit l'évolution de la transformation conforme de Riemann du disque unité sur lui-même, qui efface la trace en question et l'envoie sur le bord du disque, sous la forme d'un mouvement brownien caractérisé par un coefficient de diffusion  $\kappa$ . La transformation conforme peut aussi agir dans le demi-plan complexe.

<sup>102</sup>G. F. Lawler et W. Werner, *Ann. Probab.* **27**, 1601-1642 (1999).

<sup>103</sup>B. Duplantier, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5489-5492 (1998) ; *ibid.* **82**, 880-883 (1999), arXiv:cond-mat/9812439.

<sup>104</sup>Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'article pour grand public de Wendelin Werner, *Les chemins aléatoires*, paru dans POUR LA SCIENCE en août 2001.

Pour le processus SLE, on peut consulter : les notes de cours de W. Werner, *Random Planar Curves and Schramm-Loewner Evolutions*, Lectures Notes from the 2002 Saint-Flour Summer School, Springer L. N. Math. **1840**, 107-195, (2004), arXiv:math.PR/0303354 ; le livre très récent de G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, AMS (2005), ainsi que l'article de W. Kager et B. Nienhuis, *A Guide to Stochastic Loewner Evolution and its Applications*, *J. Stat. Phys.* **115**, 1149-1229 (2004), arXiv:math-ph/0312056.

Pour le lien du SLE avec la gravité quantique, voir : B. Duplantier, *Conformal Fractal Geometry and Boundary Quantum Gravity*, dans *Fractal Geometry and Applications, A Jubilee of Benoît Mandelbrot*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS, Vol. **72**, Part **2**, édité par M. L. Lapidus et F. van Frankenhuisen, pp. 365-482 (2004) ; arXiv:math-ph/0303034.

Celle-ci révèle en effet une structure scindée en un continuum de sous-ensembles fractaux que nous allons décrire.

Dans la continuité de la partie précédente, nous allons considérer la *théorie du potentiel associée au voisinage d'un chemin brownien plan*. Nous allons montrer comment la géométrie fine de la frontière brownienne va alors apparaître comme composante essentielle de la solution du problème électrostatique de Dirichlet associé.

## 4.2 Théorie du potentiel au voisinage d'une courbe brownienne

### 4.2.1 Problème de Dirichlet brownien

Considérons donc un chemin brownien plan  $\mathcal{B}$ , placé à l'intérieur d'un grand cercle, et le problème de Dirichlet associé où le potentiel  $u$  vaut  $u = 0$  sur la frontière  $\partial\mathcal{B}$  de la courbe brownienne, et  $u = 1$  sur le cercle (figure 14). Le chemin brownien sert donc d'électrode créant le potentiel, et par influence électrostatique, sa frontière va se charger. Il s'agit a priori d'un problème compliqué, car la courbe brownienne est complètement aléatoire !

Loin du brownien, le potentiel va dépendre de la géométrie globale du système, et en particulier de la présence du cercle qui fait office d'électrode extérieure. Imaginons un instant que celle-ci soit repoussée très loin. La courbe brownienne apparaît alors comme ponctuelle, c'est-à-dire ramassée en un point depuis les régions intermédiaires situées loin d'elle-même (et du cercle extérieur). Le potentiel variera alors comme celui d'une charge ponctuelle égale à celle portée par la frontière, c'est-à-dire comme le potentiel newtonien logarithmique  $u_2(r)$  (89).

En revanche, près de la courbe brownienne, la géométrie de la frontière va être déterminante. Le potentiel s'annulant exactement sur la frontière  $\partial\mathcal{B}$ , la question naturelle qui se pose est alors celle de son comportement analytique au voisinage de  $\partial\mathcal{B}$ , c'est-à-dire la manière dont il tend vers 0. Comme la géométrie de la frontière, particulièrement sauvage, change en tous lieux, la manière dont le potentiel s'annule change également.

Cependant, l'aléatoire brownien cache en son cœur une régularité structurelle fondamentale liée à son *invariance conforme*, et l'on peut en fait décrire le potentiel près du chemin brownien d'une manière certes probabiliste, mais *universelle*.

### 4.2.2 L'invariance conforme

Une transformation *conforme*  $\Phi$  du plan est une bijection du plan dans lui-même qui conserve les *angles* d'intersection entre courbes. On montre qu'à toute fonction analytique du plan complexe  $\Phi(z)$  on peut associer une telle transformation conforme. Localement, c'est-à-dire d'une manière infinitésimale au voisinage de l'image  $\Phi(z)$  d'un point quelconque  $z$  en coordonnées complexes, une transformation conforme est la composition d'une dilatation locale (par un facteur  $|\Phi'(z)|$ ), et d'une rotation autour de  $\Phi(z)$  (par un angle  $\arg \Phi'(z)$ ). C'est pourquoi les angles sont localement conservés.

Revenons alors pour un instant à la représentation brownienne du problème général de Dirichlet dans un domaine  $\mathcal{D}$  (figure 11), et au mouvement brownien auxiliaire issu d'un point arbitraire  $P$ , arrêté lorsqu'il touche la frontière  $\partial\mathcal{D}$ , et dont l'intégrale de Wiener représente le potentiel  $u(P)$ . Imaginons le domaine  $\mathcal{D}$  être transformé par une transformation conforme  $\Phi$  en un domaine  $\mathcal{D}' = \Phi(\mathcal{D})$ , tandis que la trajectoire brownienne  $\mathcal{B}$  est transformée en une courbe  $\Phi(\mathcal{B})$ , arrêtée

---

Pour le lien du SLE avec la théorie des champs conformes, voir :

R. Friedrich et W. Werner, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **335**, 947-952 (2002), arXiv:math.PR/0209382 ; *Commun. Math. Phys.*, **243**, 105-122 (2003), arXiv:math-ph/0301018 ; W. Werner, *Conformal restriction and related questions*, Proceedings of the conference *Conformal Invariance and Random Spatial Processes*, Edinburgh, July 2003, arXiv:math.PR/0307353 ; W. Werner et G. F. Lawler, *Probab. Th. Rel. Fields* **128**, 565-588 (2004), arXiv:math.PR/0304419 ; W. Werner, *C. R. Ac. Sci. Paris Sér. I Math.* **337**, 481-486 (2003), arXiv:math.PR/0308164 ; voir aussi J. Dubédat, arXiv:math.PR/0411299 ;

M. Bauer et D. Bernard, *Phys. Lett.* **B543**, 135-138 (2002), arXiv:math-ph/0206028 ; *Commun. Math. Phys.* **239**, 493-521 (2003), arXiv:hep-th/0210015 ; *Phys. Lett.* **B557**, 309-316 (2003), arXiv:hep-th/0301064 ; *Ann. Henri Poincaré* **5**, 289-326 (2004), arXiv:math-ph/0305061 ; Proceedings of the conference *Conformal Invariance and Random Spatial Processes*, Edinburgh, July 2003, arXiv:math-ph/0401019 ; (avec J. Houdayer) arXiv:math-ph/0411038 ; arXiv:cond-mat/0412372 ; (avec K. Kytölä) arXiv:math-ph/0503024.

lorsqu'elle touche la frontière  $\partial\mathcal{D}' = \Phi(\partial\mathcal{D})$ . Paul Lévy a montré que  $\Phi(\mathcal{B})$  est encore la trajectoire d'un mouvement brownien, à un changement de temps près : c'est la propriété d'*invariance conforme du mouvement brownien plan*.<sup>105</sup>

Considérons alors le nouveau potentiel  $u'(P')$  au point transformé  $P' = \Phi(P)$ , solution du problème de Dirichlet dans le domaine transformé  $\mathcal{D}'$ . Comme tous les objets géométriques qui représentent le potentiel ont été transformés par  $\Phi$ , et que le chemin brownien auxiliaire transformé est demeuré brownien, il en résulte que son intégrale de Wiener,  $u'(P')$ , est inchangée. Le potentiel  $u'(P')$  est donc égal au potentiel  $u(P)$ , solution du problème de Dirichlet dans le domaine originel  $\mathcal{D}$  et il y a ainsi *invariance du potentiel lorsque l'on suit cette transformation conforme*.

Dans le cas qui nous occupe plus particulièrement ici, celui du problème du potentiel  $u(P)$  de Dirichlet au voisinage d'une courbe brownienne plane (figure 14), la représentation brownienne du potentiel introduit un second mouvement brownien auxiliaire qui diffuse à partir du point  $P$ , tout en évitant la courbe brownienne originelle (figure 15). Comme nous venons de le voir, les deux chemins browniens sont statistiquement invariants conformes et ce problème probabiliste géométrique est invariant par toute transformation conforme du plan.

### 4.2.3 Le rôle des angles

Les transformation conformes conservent les angles dans le plan, et c'est pourquoi ceux-ci vont jouer un rôle essentiel dans la description du potentiel au voisinage de la frontière brownienne.

Considérons d'abord le problème simple du potentiel existant dans un secteur angulaire du plan. Plus précisément, considérons un angle d'ouverture  $\theta$  autour d'un sommet  $w$  (figure 16). On montre facilement, en utilisant la transformation conforme sigulière du plan complexe qui ouvre l'angle  $\theta$  en un angle plat,  $\Phi(z) = z^{\pi/\theta}$ , que le potentiel  $u(z)$  varie en un point d'affixe complexe  $z$  situé près de  $w$  comme

$$u(z) \approx r^{\pi/\theta}, \quad (116)$$

où  $r$  est la distance du point au sommet  $w$ ,  $r = |z - w|$ . Pour un angle plat,  $\theta = \pi$ , et l'on retrouve bien un comportement linéaire en fonction de la distance, qui correspond à un champ électrique constant au voisinage de la ligne.

## 4.3 Multifractalité

### 4.3.1 Distribution du potentiel

Revenons enfin à la question initiale de la distribution de potentiel au voisinage de la courbe brownienne  $\mathcal{B}$  (figures 14 et 15). Sa frontière  $\partial\mathcal{B}$  est une courbe fractale sans échelle microscopique, et les irrégularités de cette courbe descendent jusqu'à l'infiniment petit. Parmi toutes ces irrégularités, il est naturel, du point de vue de la théorie du potentiel et de l'invariance conforme, de rechercher celles qui sont localement comme des "angles". En effet, cette distribution d'angles et la distribution de potentiel associée sont invariantes par transformation conforme. Elle sont donc stables dans la classe de toutes les courbes browniennes obtenues par transformée conforme d'une seule réalisation d'une courbe brownienne.

On classe alors les points  $w$  du bord  $\partial\mathcal{B}$  selon les propriétés de variation du potentiel  $u(z)$  lorsqu'un point  $P$  d'affixe complexe  $z$  s'approche de  $w$  sur le bord. On dit qu'un point  $w$  est de type  $\alpha$  si, en un certain sens,

$$u(z \rightarrow w) \approx r^\alpha, \quad (117)$$

dans la limite où la distance  $r = |z - w|$  tend vers 0 (figure 17).

En comparant la propriété (117) à la forme (116) du potentiel pour un angle, on voit qu'un exposant  $\alpha$  correspond, du point de vue du potentiel, à un *angle électrostatique équivalent*  $\theta$  tel

<sup>105</sup>Paul Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris (1965).

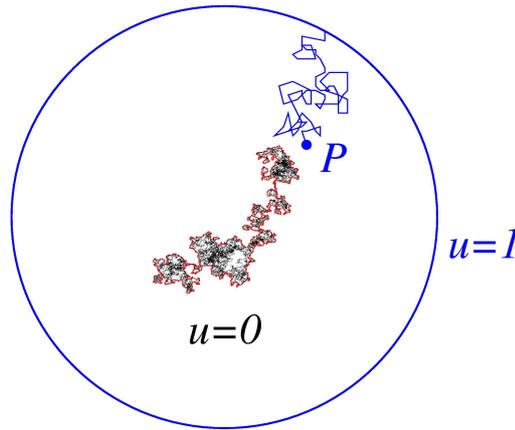


Figure 15: Le potentiel de Dirichlet  $u$  créé au point  $P$  par une courbe brownienne (en noir), et s'annulant sur sa frontière (en rouge), est représenté par un second mouvement brownien, auxiliaire (en bleu), qui diffuse à partir de  $P$  vers l'extérieur tout en évitant le premier.

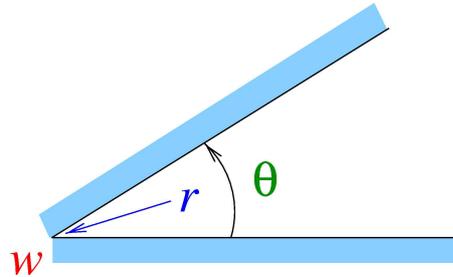


Figure 16: Secteur angulaire d'apex  $w$  et d'angle  $\theta$ .

que

$$\alpha = \frac{\pi}{\theta}. \quad (118)$$

Tout se passe comme s'il existait localement sur la frontière un angle  $\theta = \pi/\alpha$ .<sup>106</sup> Le domaine angulaire étant tel que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , le domaine des exposants  $\alpha$  est  $1/2 \leq \alpha < \infty$ , et un théorème dû à A. Beurling l'assure rigoureusement. Le domaine où  $\alpha$  est proche de  $1/2$  correspond à  $\theta$  proche de  $2\pi$ , c'est-à-dire à un secteur angulaire complètement ouvert, et donc à la présence d'une *aiguille* très fine sur la frontière. Le domaine où  $\alpha$  est très grand correspond à  $\theta$  proche de 0, donc à un secteur angulaire très étroit, et l'on parle alors d'un *fjord*.

Soit maintenant  $\partial\mathcal{B}_\alpha$  l'ensemble des points de type  $\alpha$  sur la frontière. Pour mesurer la probabilité de trouver ces points de type  $\alpha$ , on introduit la dimension de Hausdorff de cet ensemble  $\partial\mathcal{B}_\alpha$ ,

$$f(\alpha) = \dim(\partial\mathcal{B}_\alpha). \quad (119)$$

Ceci définit le *spectre multifractal*  $f(\alpha)$  de la distribution de potentiel considérée. Ce spectre est invariant conforme en deux dimensions, car dans une transformée conforme, les exposants locaux

<sup>106</sup> La présence d'un exposant de singularité locale  $\alpha$  ne signifie pas nécessairement que  $\theta = \pi/\alpha$  soit égal à l'angle géométrique, car l'environnement du point  $w$  sur un fractal aléatoire fait en général écran au potentiel et réduit l'angle électrostatique par rapport à l'angle géométrique.

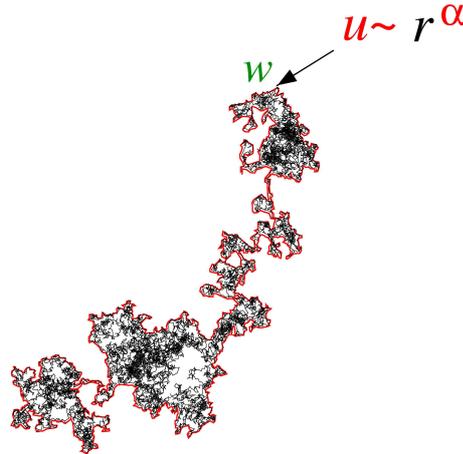


Figure 17: Comportement singulier en  $r^\alpha$  du potentiel au voisinage d'un point  $w$  de type  $\alpha$ .

$\alpha = \pi/\theta$  du potentiel sont eux-mêmes invariants.<sup>107</sup>

D'un point de vue historique, le concept de *multifractalité* a été introduit par B. Mandelbrot en 1974,<sup>108</sup> à propos du phénomène de turbulence en hydrodynamique, puis par H. Hentschel, I. Procaccia, U. Frisch et G. Parisi.<sup>109</sup> Il fut ensuite développé à l'Université de Chicago par T. C. Halsey *et al.*<sup>110</sup> Il correspond à l'existence d'un ensemble continu de dimensions fractales  $f(\alpha)$ , fonctions d'un continuum d'exposants  $\alpha$ .

### 4.3.2 Spectre multifractal brownien

L'une des premières propriétés est que la dimension globale de Hausdorff d'un objet multifractal est toujours le maximum de son spectre multifractal. Ainsi, pour la frontière de la courbe brownienne, cela se traduit par

$$D_H = \sup_{\alpha} f(\alpha) = \frac{4}{3}, \tag{120}$$

en raison de la conjecture de Mandelbrot mentionnée plus haut.

Le spectre complet  $f(\alpha)$  pour la courbe brownienne été calculé en 1998 à l'aide de la méthode dite de "gravité quantique".<sup>111</sup> On utilise une représentation du même problème sur une sur-

<sup>107</sup>Les définitions locales de l'exposant  $\alpha$  et de  $f(\alpha)$  données en (117) et (119) sont seulement heuristiques, et la manière de prendre les limites n'y a pas été précisée. Pour un point donné  $w$  sur le bord d'un fractal aléatoire, il n'existe en général pas d'exposant local  $\alpha$  stable obtenu par "simple limite" vers le point. On procède alors autrement. On définit la *mesure harmonique*  $\omega(w, r)$  comme la probabilité qu'un mouvement brownien parti d'un point quelconque du cercle extérieur (de l'infini, donc) touche la frontière  $\partial\mathcal{B}$  pour la première fois à l'intérieur de la boule de centre  $w$  et de rayon  $r$ . Cette mesure harmonique est similaire à la représentation brownienne du potentiel  $u(P)$ , qui est la mesure harmonique du bord extérieur du domaine  $\mathcal{D}$  vue du point  $P$ . Ensuite, on définit l'ensemble  $\partial\mathcal{B}_{\alpha, \eta}$  des points du bord  $\partial\mathcal{B}$ ,  $w = w_{\alpha, \eta}$ , pour lesquels il existe une suite décroissante de rayons  $r_j, j \in \mathbb{N}$  tendant vers 0, telle que  $r_j^{\alpha+\eta} \leq \omega(w, r_j) \leq r_j^{\alpha-\eta}$ . Le spectre multifractal  $f(\alpha)$  est alors défini globalement comme la limite pour  $\eta \rightarrow 0$  de la dimension de Hausdorff de l'ensemble  $\partial\mathcal{B}_{\alpha, \eta}$ , soit

$$f(\alpha) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \dim \left\{ w : \exists \{r_j \rightarrow 0, j \in \mathbb{N}\} : r_j^{\alpha+\eta} \leq \omega(w, r_j) \leq r_j^{\alpha-\eta} \right\}.$$

<sup>108</sup>B. B. Mandelbrot, *J. Fluid. Mech.* **62**, 331-358 (1974).

<sup>109</sup>H. G. E. Hentschel et I. Procaccia, *Physica D* **8**, 435-444 (1983) ; U. Frisch et G. Parisi, *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, course LXXXVIII, edited by M. Ghil (North-Holland, New York, 1985) p. 84.

<sup>110</sup>T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia et B. I. Shraiman, *Phys. Rev. A* **33**, 1141-1151 (1986); *ibid.* **34**, 1601 (1986).

<sup>111</sup>B. Duplantier, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 880-883 (1999), arXiv:cond-mat/9812439.

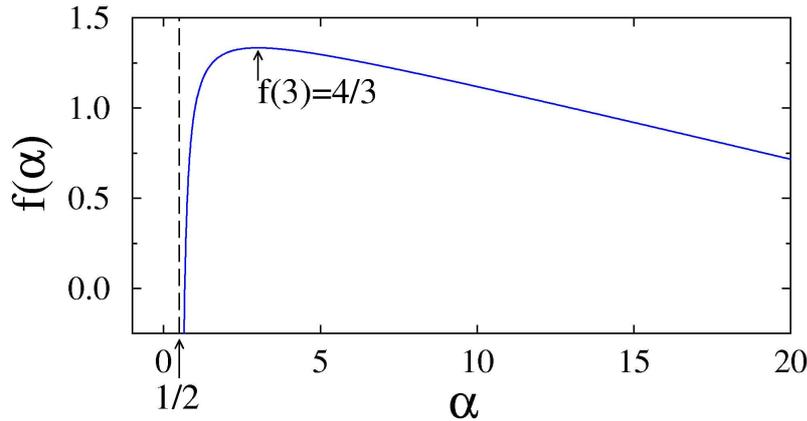


Figure 18: *Fonction multifractale  $f(\alpha)$  de la frontière brownienne.*

face aléatoire, où la métrique fluctue, au lieu du plan euclidien habituel. Les lois probabilistes géométriques y sont grandement simplifiées par les fluctuations “quantiques” de la métrique et le comportement singulier du problème de Dirichlet brownien directement accessible !

On peut revenir ensuite au spectre multifractal dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , grâce à une relation fondamentale entre exposants critiques dans le plan et sur une surface aléatoire, la formule dite de “KPZ”, découverte originellement en 1988 par trois physiciens russes, Knizhnik, Polyakov, et Zamolodchikov.<sup>112</sup> Nous n’avons pas la place ici de développer plus avant cette méthode.<sup>113</sup>

On trouve la formule

$$f(\alpha) = \alpha + b - \frac{b\alpha^2}{2\alpha - 1}, \quad b = \frac{25}{12}. \quad (121)$$

Cette courbe est tracée en figure 18. Le domaine de définition en est bien la demi-droite  $(1/2, +\infty)$ . On vérifie que le maximum de  $f$  se situe à la valeur  $4/3$ , en accord avec la conjecture de Mandelbrot (120) pour la dimension fractale de la frontière. Il correspond à une valeur  $\alpha = 3$ , soit à un angle électrostatique typique de  $\pi/3$ .

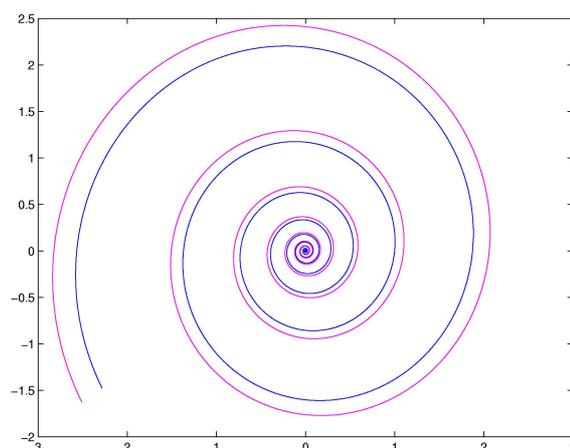
En outre, on peut calculer par la même méthode le spectre multifractal du potentiel près d’une marche aléatoire auto-évitante, et l’on trouve un spectre identique à celui de la courbe brownienne, confirmant pleinement l’identité de la frontière brownienne à une telle marche auto-évitante.

Mentionnons que les travaux de Lawler, Schramm et Werner contiennent aussi en principe l’information nécessaire au calcul de ce spectre du potentiel brownien. Dans l’approche rigoureuse par le SLE, ces auteurs identifient la frontière à celle du processus  $SLE_6$ , conjecturé être aussi un  $SLE_{8/3}$  et la limite d’échelle du polymère auto-évitant.

Cette courbe  $f(\alpha)$ , appelée aussi spectre de la mesure harmonique, résoud donc le problème de la distribution de potentiel au voisinage d’un chemin brownien dans un sens probabiliste, puisque l’on connaît ainsi la dimension fractale de l’ensemble des points où le potentiel varie de manière déterminée, en  $r^\alpha$ .

<sup>112</sup>V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Mod. Phys. Lett. A* **3**, 819-826 (1988).

<sup>113</sup>B. Duplantier, *Conformal Fractal Geometry and Boundary Quantum Gravity*, dans *Fractal Geometry and Applications, A Jubilee of Benoît Mandelbrot*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS, Vol. **72**, Part **2**, édité par M. L. Lapidus et F. van Frankenhuijsen, pp. 365-482 (2004) ; arXiv:math-ph/0303034 ; voir aussi V. Fateev, A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, *Boundary Liouville Field Theory I. Boundary State and Boundary Two-point Function*, arXiv:hep-th/0001012 ; I. K. Kostov, B. Ponsot et D. Serban, *Nucl. Phys. B* **683**, 309-362 (2004), arXiv:hep-th/0307189 ; I. K. Kostov, *Nucl. Phys. B* **689** 3-36 (2004), arXiv:hep-th/0312301 ; *Proceedings of the Conference “Lie theory and its applications in physics - 5”*, Varna, Bulgaria (2003), arXiv:hep-th/0402098, et les références citées.

Figure 19: *Double spirale logarithmique.*

Les autres valeurs de  $b$  ( $b = \frac{25-c}{12} \geq 2$ , où  $c$  est la “charge centrale” de la théorie conforme associée) dans (121) engendrent les spectres multifractaux du potentiel ou de la mesure harmonique de l’ensemble des courbes aléatoires invariantes conformes dans le plan. Ce sont les SLE qui décrivent les bords d’amas critiques dans les modèles statistiques bi-dimensionnels, tels les modèles d’Ising ou de Potts.<sup>114</sup>

#### 4.4 Multifractalité généralisée

##### 4.4.1 Spirales logarithmiques

Nous avons considéré jusqu’à présent les seules variations du potentiel. On peut aussi étudier la forme des lignes équipotentielles. Comme le potentiel suit les propriétés d’invariance conforme de la courbe brownienne, il nous faut tout d’abord déterminer les formes géométriques conservées par cette invariance.

Ce sont les *spirales logarithmiques* qui jouent un rôle particulier dans la théorie du potentiel en deux dimensions. Une telle spirale centrée à l’origine est définie par la variation logarithmique de l’angle polaire  $\varphi$  en fonction de la distance  $r$  à l’origine :

$$\varphi = \lambda \ln r ,$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel positif ou négatif.

Lorsque l’on applique une transformation conforme  $\Phi$ , celle-ci est équivalente au voisinage du centre à une dilatation,  $r \rightarrow |\Phi'(0)|r$ , composée avec une rotation. La dilatation transforme l’angle  $\varphi = \lambda \ln r$  en  $\lambda \ln r + \lambda|\Phi'(0)|$ , et il s’agit donc d’une rotation locale de la spirale dont la forme géométrique est ainsi conservée.

La frontière brownienne est une équipotentielle par construction. Il va exister une multitude de points où cette frontière équipotentielle va s’enrouler localement sur elle-même en double spirale logarithmique, comme montré en figure 19.

##### 4.4.2 Spectre mixte multifractal

On arrive alors à l’idée d’Ilia Binder en 1997 dans sa thèse<sup>115</sup> de définir une multifractalité généralisée. On recherche l’ensemble  $\partial\mathcal{B}_{\alpha,\lambda}$  des points  $w$  de la frontière  $\partial\mathcal{B}$ , où le potentiel varie en

<sup>114</sup>B. Duplantier, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1363-1367 (2000), arXiv:cond-mat/9908314 ; *J. Stat. Phys.* **110**, 691-738 (2003), arXiv:cond-mat/0207743.

<sup>115</sup>I. A. Binder, *Harmonic Measure and Rotation of Simply Connected Planar Domains*, PhD Thesis, Caltech (1997).

loi de puissance donnée  $r^\alpha$ , et la frontière spirale avec un taux donné  $\lambda$ . Ces conditions s'écrivent heuristiquement pour un point  $z$  voisin de  $w$  :

$$\begin{aligned} u(z \rightarrow w \in \partial\mathcal{B}_{\alpha,\lambda}) &\approx r^\alpha, \\ \varphi(z \rightarrow w \in \partial\mathcal{B}_{\alpha,\lambda}) &\approx \lambda \ln r, \end{aligned} \quad (122)$$

dans la limite  $r = |z - w| \rightarrow 0$ . La dimension de Hausdorff  $f(\alpha, \lambda) = \dim(\partial\mathcal{B}_{\alpha,\lambda})$  définit alors le *spectre multifractal mixte*, qui est invariant conforme car sous une transformation conforme à la fois  $\alpha$  et  $\lambda$  sont localement invariants.

Avec Ilia Binder, nous avons calculé ce spectre mixte pour un mouvement brownien, par la méthode de gravité quantique.<sup>116</sup> Il satisfait à une équation d'échelle exacte

$$f(\alpha, \lambda) = (1 + \lambda^2) f\left(\frac{\alpha}{1 + \lambda^2}\right) - b\lambda^2, \quad (123)$$

qui donne pour (121)

$$f(\alpha, \lambda) = \alpha + b - \frac{b\alpha^2}{2\alpha - 1 - \lambda^2}, \quad b = \frac{25}{12}. \quad (124)$$

Son domaine de définition est  $\alpha \geq \frac{1}{2}(1 + \lambda^2)$ , en accord avec un théorème de Beurling. Différents spectres sont représentés en figure 20.

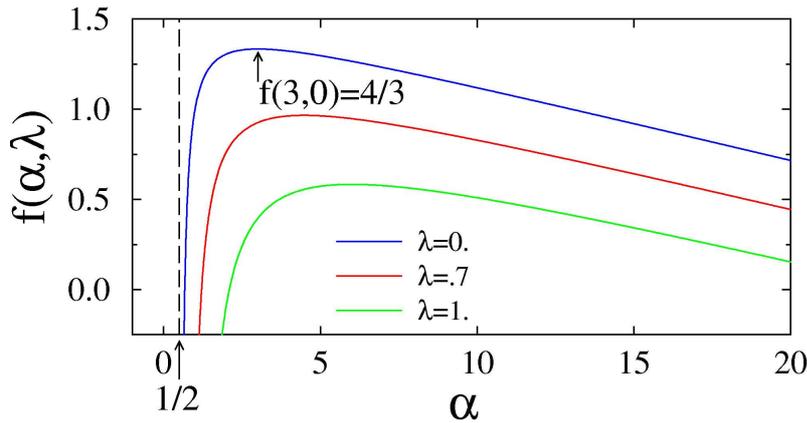


Figure 20: *Spectre multifractal universel  $f(\alpha, \lambda)$  du chemin brownien pour différentes valeurs du taux de spirale  $\lambda$ . Le maximum  $f(3, 0) = 4/3$  est la dimension de Hausdorff de la frontière.*

Cette fonction ne dépendant pas du signe de  $\lambda$ , les rotations spirales dans les sens positif et négatif sont équiprobables, comme attendu. On observe que l'on retrouve le spectre harmonique précédent  $f(\alpha)$  comme le maximum

$$f(\alpha) = f(\alpha, \lambda = 0) = \sup_{\alpha} f(\alpha, \lambda).$$

Par symétrie, la situation la plus probable pour un point du bord est l'absence de rotation spirale, soit  $\lambda = 0$ .

On peut aussi considérer uniquement la dimension fractale  $D_H(\lambda)$  des points du bord, qui sont des sommets de spirales logarithmiques de type  $\lambda$ . Pour cela, on prend le maximum du spectre mixte par rapport à l'autre variable,  $\alpha$  :

$$D_H(\lambda) = \sup_{\alpha} f(\alpha, \lambda) = \frac{4}{3} - \frac{3}{4}\lambda^2.$$

<sup>116</sup>B. Duplantier et I. A. Binder, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 264101 (2002); arXiv:cond-mat/0208045.

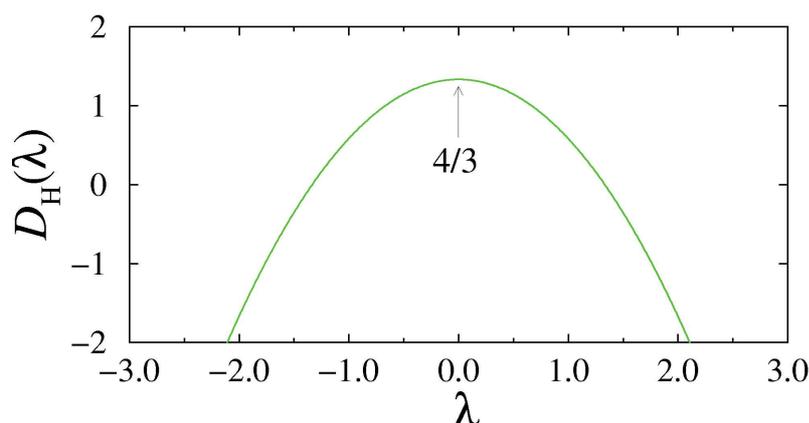


Figure 21: Dimension fractale  $D_H(\lambda)$  des sommets de spirales de type  $\lambda$  le long de la frontière brownienne.

Cette dimension fractale a donc la forme d'une parabole en fonction de  $\lambda$ , dont la valeur maximale est encore la dimension de Hausdorff globale de la frontière  $D_H = 4/3$  (figure 21).

Il nous reste à faire quelques remarques.

Les calculs de gravité quantique peuvent être généralisés à toute la classe des courbes invariantes conformes du plan, et donc au processus de Schramm SLE. Les spectres sont donnés par les mêmes formules (121), (124) pour différentes valeurs du paramètre  $b$ .

On prédit en particulier par cette méthode heuristique que les spectres d'une courbe brownienne, d'un amas de percolation<sup>117</sup> et d'une marche auto-évitante sont identiques. Il s'ensuit que la frontière brownienne et la frontière d'un amas de percolation coïncident avec une marche auto-évitante dans la limite d'échelle, ce qui étend la conjecture de Mandelbrot.

Enfin, ces résultats multifractals, originellement trouvés d'une manière heuristique en physique théorique, peuvent en principe être démontrés rigoureusement dans le cadre probabiliste général du SLE $_{\kappa}$ .<sup>118</sup> Frontière brownienne et frontière de percolation y sont identifiées à la frontière du processus SLE $_6$  (grâce aux travaux déjà cités de Lawler, Schramm et Werner, et aussi de S. Smirnov<sup>119</sup> et V. Beffara<sup>120</sup>), tandis que d'un point de vue rigoureux la même identification à la marche auto-évitante à un processus SLE $_{8/3}$ , certainement vraie, reste à démontrer !<sup>121</sup>

Nous voici rendus au bout de ce chemin commencé avec Robert Brown en 1827 et ses observations au microscope, Einstein en 1905 et sa théorie des fluctuations browniennes. Le nouveau paradigme des chemins stochastiques pourrait être aujourd'hui le SLE, ou Stochastic Loewner Evolution, lui-même engendré par un mouvement brownien sur le bord d'un domaine plan, et aux assez extraordinaires propriétés d'invariance conforme dans le plan euclidien. Ce processus nous a alors entraînés vers les rivages de la gravité quantique bi-dimensionnelle, où la stochasticité du SLE semble appeler les changements fluctuants de la métrique. Nous avons ainsi retrouvé en un

<sup>117</sup>B. Duplantier, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3940-3943 (1999), arXiv:cond-mat/9901008 ; M. Aizenman, B. Duplantier et A. Aharony, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1359-1362 (1999), arXiv:cond-mat/9901018.

<sup>118</sup>I. A. Binder et B. Duplantier, en préparation ; voir aussi D. Beliaev, *Harmonic Measure on Random Fractals*, PhD thesis, KTH, Stockholm, Sweden, 2005.

<sup>119</sup>S. Smirnov, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333**, 239-244 (2001).

<sup>120</sup>V. Beffara, arXiv:math.PR/0211322, à paraître à *Annals of Probability*.

<sup>121</sup>G. F. Lawler, O. Schramm et W. Werner, *On the Scaling Limit of Planar Self-Avoiding Walk*, dans *Fractal Geometry and Applications, A Jubilee of Benoit Mandelbrot*, Proceedings of Symposia in Pure and Applied Mathematics, AMS, Vol. **72**, Part **2**, édité par M. L. Lapidus et F. van Frankenhuijsen, pp. 339-384 (2004), arXiv:math.PR/0204277.

certain sens les travaux d'Einstein, dont la théorie de la relativité générale de 1916 expliqua que la gravitation équivaut à un changement de métrique. Voici la mécanique statistique qui à son tour s'engouffre dans la brèche, souhaitons-lui de fructueux développements !

*Remerciements* : Je tiens à remercier Emmanuel Guitter pour la confection des figures, Michel Bauer, Denis Bernard, Vincent Pasquier, Jean-Louis Sikorav et enfin tout particulièrement Kirone Mallick, pour une relecture attentive et critique de l'article.