Séminaire Poincaré 1 (2002) 55 – 65

Séminaire Poincaré

Effet Casimir et géométrie*

Roger BALIAN
Service de Physique Théorique†
Orme des Merisiers
CEA, Saclay
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex

L'effet Casimir a été présenté dans la contribution de B. Duplantier à ce séminaire Poincaré. Le but du présent exposé est d'en montrer des aspects plus généraux et de répondre à quelques questions théoriques. L'énergie associée au champ électromagnétique quantifié, qui existe dans des régions vides délimitées par des parois de matière, peut-elle être définie indépendamment des propriétés de ces parois ? Comment cette énergie dépend-elle de leur forme ? Comment varie-t-elle avec la température du gaz de photons qui constitue le champ ? L'existence de l'effet Casimir est-elle liée aux propriétés spécifiques du champ électromagnétique ?

Nous nous appuierons principalement sur deux articles détaillés (R. Balian and B. Duplantier, Electromagnetic waves near perfect conductors, I. Multiple scattering expansions and distribution of modes, Annals of Phys. **104** 300-335 (1977) ; II. Casimir effect, **112**, 165-208 (1978)). Bien qu'anciens, ils couvrent les divers aspects des questions soulevées ci-dessus, ce qui nous permettra ici de nous contenter d'en présenter les principales idées ; nous utiliserons les mêmes notations pour en faciliter l'accès.

Résumé. On démontre qu'il existe une limite pour l'énergie de point zéro et l'énergie libre d'un champ électromagnétique en présence de parois conductrices, lorsque l'épaisseur et la résistivité de celles-ci tendent vers 0 et que leur courbure est finie. La nature électromagnétique du champ est essentielle. On donne une expression explicite de l'énergie libre en fonction de la forme arbitraire des parois et de la température. On en tire diverses applications : comportements à basse température, à haute température où apparaissent des contraintes de froissement, stabilité d'une feuille plane, répartition spatiale de l'énergie de part et d'autre d'une surface courbe, forces entre conducteurs éloignés, formes diverses (plaques parallèles, sphère, cylindre, nid d'abeilles).

1 L'énergie libre régularisée

Chacun des modes m d'un champ électromagnétique $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ se comporte comme un oscillateur harmonique de fréquence $\nu_m = \omega_m/2\pi = cq_m/2\pi$, où q_m est la longueur du vecteur d'onde correspondant. L'énergie associée, $\frac{1}{2}\int \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0^{-1}\mathbf{B}^2$ peut prendre les valeurs quantifiées $\varepsilon(q_m, n) = \hbar c q_m(n+\frac{1}{2})$. A température finie, ce mode fournit à l'énergie libre la contribution

$$f(q_m) = -T\ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar c q_m (n+\frac{1}{2})/T} = T\ln[2\ \mathrm{sh}(\hbar c q_m/2T)]\ . \tag{1}$$

A température nulle, la contribution correspondante à l'énergie du vide est $\frac{1}{2}\hbar c q_m$.

*Version préliminaire
†Unité de recherche associée au CNRS

L'énergie (libre) totale s'obtient en sommant sur les modes m ; le résultat dépend de la distribution des valeurs de q_m, elle-même conditionnée par la nature, les propriétés et la forme des parois matérielles S qui délimitent le "vide" auquel on s'intéresse. L'effet Casimir, propriété propre du champ, ne peut donc être défini que si ces parois ne jouent qu'un rôle géométrique, ce qu'il nous faudra vérifier.

La sommation sur m de (1) est divergente pour deux raisons. D'une part, le spectre des q_m forme dans l'espace entier un *continuum.* D'autre part, ce spectre n'est *pas borné* supérieurement et $f(q_m)$ est proportionnel à q_m pour $q_m \to \infty$. On s'affranchit de ces divergences par la même méthode qu'en théorie quantique des champs. On régularise d'abord les expressions à calculer en introduisant des *coupures.* Ensuite, comme pour la renormalisation, on déduit de ces expressions, devenues finies, des quantités physiquement *observables* au moins en théorie, et on y fait tendre les paramètres de coupure vers ∞. La théorie est renormalisable si la limite des grandeurs physiques existe.

Ici, on s'intéresse au champ dans le vide délimité par des objets matériels S. Afin d'éliminer la difficulté liée à la continuité du spectre, on commence par enfermer tout le système dans une *enceinte*, dont le volume Ω tendra vers ∞. On suppose la frontière Σ de cette enceinte matérialisée par un conducteur parfait, ce qui confine le champ à l'intérieur en le découplant complètement de l'extérieur de Σ. Lorsque $\Omega \to \infty$, la densité de modes $\Omega q^2/\pi^2$ et par suite l'énergie totale sont proportionnelles à Ω et divergent. Cependant, l'énergie, dans le présent problème, n'est définie qu'à une constante additive près. En prenant comme état de référence le vide intérieur à Σ en l'absence des objets S, nous cherchons à définir l'énergie libre Casimir (ou l'énergie Casimir à $T = 0$) par différence :

$$F = \sum_m f(q_m; S, \Sigma) - \sum_{m'} f(q'_{m'}; \Sigma). \tag{2}$$

Le second terme est associé aux modes $q'_{m'}$ intérieurs à l'enceinte Σ vide, le premier aux modes q_m intérieurs à Σ en présence des corps S. Nous nous intéressons donc à la *variation* de l'énergie du vide lorsqu'on y introduit les objets S.

Si l'on veut pouvoir attribuer une énergie au seul champ, indépendamment des corps matériels S, il faut que le volume occupé par le champ soit presque le même pour les deux termes de (2), donc que S soit constitué de plaques minces, d'épaisseur négligeable. Sinon, puisque le second terme comprend l'énergie du champ à l'intérieur de cette épaisseur (énergie qui de plus est infinie en raison de la seconde cause de divergence), il faudrait inclure dans le premier l'énergie intérieure aux matériaux ; mais il est impossible d'y séparer la contribution du champ de celle de la matière, de sorte qu'il n'y aurait pas d'effet Casimir attribuable au champ seul. De plus, si l'on veut dégager un effet indépendant de la nature du matériau, il faut pouvoir modéliser celui-ci par des propriétés idéales. Nous modéliserons donc S par une ou des feuilles *parfaitement conductrices* et *infiniment minces.* Si dans cette limite F existe, on pourra la considérer comme l'énergie libre *du champ* en présence des parois S. Elle ne dépendra que de la géométrie de ces parois et de la température. Le cas considéré par Casimir était celui où S était formé de deux plaques parallèles ; le premier terme de (2) comprend alors les contributions des trois régions qu'elles délimitent. Nous prendrons aussi pour S la peau d'une sphère, d'un cylindre ou d'un tore, auquel cas le premier terme de (2) se décompose en deux contributions, l'une intérieure, l'autre extérieure à S.

Le fait de prendre des parois parfaitement conductrices revient à imposer au champ les *conditions aux limites* $\mathbf{E}_\mathrm{t} = \mathbf{B}_\mathrm{n} = 0$ sur les composantes tangentielles (t) ou normales (n) sur la surface S, de chaque côté, ainsi que sur la frontière Σ. Accompagnées de ces conditions, les équations de Maxwell

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E}_m = \mathrm{i}cq_m\, \mathbf{B}_m \quad , \quad \mathrm{i}c\, \mathrm{rot}\, \mathbf{B}_m = q_m\, \mathbf{E}_m \ , \tag{3}$$

$$(\nabla^2 + q_m^2)\mathbf{E}_m = 0 \quad , \quad (\nabla^2 + q_m^2)\mathbf{B}_m = 0 \tag{4}$$

déterminent les modes propres m dans chacune des régions v considérées.

Il reste à régulariser l'expression (2) afin de supprimer la divergence associée aux grandes valeurs des q_m. On note pour cela qu'à haute fréquence, les conducteurs réels ne sont plus parfaits. Les ondes électromagnétiques peuvent y pénétrer, et les traverser librement puisqu'ils sont minces. Une compensation se produit donc entre les deux termes de (2) pour les modes élevés, qui tendent à devenir les mêmes puisque les objets S deviennent alors *transparents*. Afin de modéliser ce fait, nous supprimons simultanément les modes m et m' élevés en introduisant un facteur de coupure $\chi(q)$, égal à 1 pour q fini et décroissant pour q très grand, ce qui rend séparément convergentes les deux sommes de (2).

Introduisant la distribution

$$\delta\rho(q) = \sum_m \delta(q - q_m) - \sum_{m'} \delta(q - q'_{m'}), \tag{5}$$

différence entre les densités spectrales des modes dans Σ en présence (m) et en l'absence (m') des parois S, nous introduisons donc l'énergie libre régularisée

$$F_{\mathrm{reg}} = \int_0^\infty dq\ \delta\rho(q)\ f(q)\ \chi(q), \tag{6}$$

qui est finie, et dépend encore non seulement de S mais aussi de Σ et de $\chi(q)$. L'universalité de l'effet Casimir, le fait qu'il ne dépend que de la géométrie des parois S parfaitement conductrices, repose sur *l'existence d'une limite* F de (6) lorsque Σ s'éloigne à l'infini et $\chi(q)$ tend vers 1, les formes de Σ et de $\chi(q)$ lors du passage à la limite étant arbitraires.

2 Champs en présence de conducteurs

La démonstration a pu être effectuée, et une forme explicite pour cette limite a pu être donnée, à condition que la surface S ait partout un plan tangent et soit fermée. Des pathologies apparaissent si S présente un bord ou un dièdre. La technique utilisée repose sur l'emploi de fonctions de Green associées aux Eqs.(4), décrivant la propagation du champ d'un point à un autre en présence des parois S et Σ, dans les diverses régions v que celles-ci délimitent. La densité spectrale (5) se déduit directement de la connaissance de ces fonctions de Green. Celles-ci peuvent s'exprimer, grâce à la méthode de Dirichlet, à l'aide d'équations intégrales sur les surfaces S et Σ, qui permettent en définitive de relier l'effet Casimir à la géométrie de S.

Nous nous contenterons ici d'esquisser ce programme. Compte tenu de la symétrie entre les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, il est commode d'introduire à la fois *deux fonctions de Green*, l'une magnétique $\mathbf{\Gamma}(r, r')$, l'autre électrique $\Xi(r, r')$, tenseurs à deux indices en r et r'. La première représente le champ magnétique créé au point r, en présence des surfaces conductrices, par un dipôle magnétique situé en r' et oscillant selon $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kct}$ à la fréquence complexe $ck/2\pi$. La densité de courant en r associée à cette source est

$$\mathbf{j}_0(r, r') = \mathrm{rot}_r\ [\delta^3(r - r')\mathbf{1}] \tag{7}$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur unité, et $\mathbf{\Gamma}(r, r'; k)$ est défini par les équations différentielles

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{\Gamma} = -\mathrm{rot}\, \mathbf{j}_0 \quad , \quad \mathrm{div}\, \mathbf{\Gamma} = 0, \tag{8}$$

et les conditions aux limites

$$\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{n}} = 0 \quad , \quad (\mathrm{rot}\, \mathbf{\Gamma})_{\mathrm{t}} = 0. \tag{9}$$

La fonction de Green $\mathbf{\Gamma}$ est engendrée par $\mathbf{j}_0$ et par les courants $\mathbf{j}(\alpha, r')$ induits aux points α des surfaces conductrices S, Σ ; ceux-ci sont des tenseurs à deux indices, dont le premier se réfère à la direction du courant, perpendiculaire à la normale n_α en α à la frontière (orientée vers le côté de

S contenant r et r'), et le second à l'orientation du dipôle-source en r'. Le champ créé par chaque courant élémentaire $\mathbf{j}$ vaut $M\mathbf{j}$ où M est le noyau

$$M(r,r') = \mathrm{rot}_r\ [G_0(|r-r'|)\mathbf{1}], \tag{10}$$

et G_0 la fonction de Green scalaire dans l'espace infini

$$G_0(r) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}. \tag{11}$$

La fonction de Green magnétique $\mathbf{\Gamma}$ s'exprime donc selon

$$\mathbf{\Gamma}(r,r') = \int d^3r'' M(r,r'')\ \mathbf{j}_0(r'',r') + \int d^2\alpha\ M(r,\alpha)\ \mathbf{j}(\alpha,r'), \tag{12}$$

dont le premier terme $\mathbf{\Gamma}_0$ serait le champ produit dans l'espace infini par le dipôle (7). Les courants de surface $\mathbf{j}$ sont déterminés, selon une extension de la méthode de Dirichlet, par l'équation intégrale sur les surfaces frontières :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + K\mathbf{j}\quad,\quad \mathbf{j}_1(\alpha,r') = \int d^3r K(\alpha,r)\ \mathbf{j}_0(r,r'), \tag{13}$$

dont le noyau entre deux points de la surface est le tenseur

$$K(\alpha,\beta) = 2n_\alpha \wedge \mathrm{rot}_\alpha[G_0(|\alpha-\beta|)\mathbf{1}]. \tag{14}$$

En définitive, la solution de (13) détermine $\mathbf{j}$, d'où $\mathbf{\Gamma}$ se déduit par (12), compte tenu des diverses définitions (7), (10), (11), (14).

La fonction de Green $\mathbf{\Gamma}$ est une *fonction génératrice pour les modes m* localisés à l'intérieur de la région connexe v où se trouve la source (7). En effet, en termes de la variable complexe k, ses pôles sont les valeurs $k = \pm q_m$ et les résidus correspondants $\frac{1}{2}q_m\mathbf{B}_m(r)\otimes\mathbf{B}_m(r')$. La densité spectrale $\rho(q) = \sum_m \delta(q-q_m)$ vaut en particulier

$$\rho(q) = \frac{2}{\pi q}\int_v d^3r\ \mathrm{tr}\ \mathrm{Im}\mathbf{\Gamma}(r,r;q+\mathrm{i}0). \tag{15}$$

On introduit de même une fonction de Green électrique $\mathbf{\Xi}$ en échangeant champs magnétique et électrique, en particulier en échangeant les conditions aux limites (9). On trouve des formules semblables, au changement de signe de $\mathbf{j}_1$ près. En exprimant la densité spectrale selon

$$\rho(q) = \frac{1}{\pi q}\int_v d^3r\ \mathrm{tr}\ \mathrm{Im}\{[\mathbf{\Gamma}+\mathbf{\Xi}](r,r\ ;q+\mathrm{i}0)\}, \tag{16}$$

des simplifications vont ainsi apparaître.

L'*itération* de l'équation intégrale (13) fournit

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + K\ \mathbf{j}_1 + K^2\ \mathbf{j}_1\ +\ \cdots\ , \tag{17}$$

série dont les termes s'interprètent comme des *courants induits successifs* : $\mathbf{j}_1$ est selon (13) un courant directement induit par le dipôle source dans les parois conductrices ; il induit à son tour à l'aide du propagateur K le second terme, et ainsi de suite. L'expression (14) de K montre que, compte tenu de (11), ce propagateur décroît exponentiellement avec la distance (en oscillant) si Im $k > 0$. De plus, K s'annule lorsque le point β est dans le plan tangent à la frontière en α : un courant circulant dans une surface plane n'induit pas selon K de courant secondaire dans la même surface ; à courte distance, K est proportionnel à la courbure. S'appuyant sur ces deux propriétés, on peut démontrer que la série (17) est *convergente* au moins pour Im $k > |\text{Re } k|$. (Pour $k = 0$ décrivant des champs statiques, la convergence dépend de la *topologie* des frontières.) La théorie générale de l'effet Casimir va utiliser cette convergence.

La série résultant pour $\mathbf{\Gamma}$ de (12) et (17) s'écrit

$$\mathbf{\Gamma} = M \frac{1}{1-K}\, \mathbf{j}_0 = M\, \mathbf{j}_0 + MK\, \mathbf{j}_0 + MK^2\, \mathbf{j}_0 + MK^3\, \mathbf{j}_0 \ + \ \cdots , \qquad (18)$$

où M défini par (10) représente la propagation d'une onde issue d'un courant unité, et K défini par (14) une propagation semblable suivie de la création d'un courant induit. On interprète ainsi (18) comme un développement en *diffusions multiples* : l'onde issue de la source en r' peut atteindre directement le point r (premier terme) ; elle peut se propager de r' vers un point α de la frontière et s'y diffuser pour atteindre ensuite r (deuxième terme) ; elle peut se diffuser successivement deux fois sur la frontière (troisième terme) ; etc. Les diffusions rasantes s'annulent, de sorte que si S est un simple plan la série (18) se réduit à ses deux premiers termes, dont le second décrit l'onde réfléchie.

La fonction de Green *électrique* Ξ contient la même information que $\mathbf{\Gamma}$ puisque

$$\Xi(r, r' \,; k) = k^{-2} \text{ rot}_r \text{ rot}_{r'} \, [\mathbf{\Gamma}(r, r' \,; k) - \mathbf{\Gamma}(r, r' \,; \text{i}0)], \qquad (19)$$

et inversement. Mais il est remarquable qu'on puisse aussi l'exprimer comme la série alternée

$$\Xi = M \frac{1}{1+K}\, \mathbf{j}_0 = M\mathbf{j}_0 - MK\, \mathbf{j}_0 + MK^2\mathbf{j}_0 - MK^3\mathbf{j}_0 \ + \ \cdots , \qquad (20)$$

qui a une interprétation semblable à (18). (Cependant, alors que la série (18) s'annule comme il se doit lorsque r et r' sont de part et d'autre d'une frontière fermée, il n'en est pas de même de (20) qui ne coïncide avec Ξ que lorsque r et r' sont dans la même région v connexe.)

Regrouper (18) et (19) comme dans (16) fait ainsi disparaître tous les termes impairs du développement et fournit une série géométrique en K^2. Seuls survivent pour le calcul de la densité de modes les termes décrivant un *nombre pair de diffusions*. Par ailleurs, passer d'un côté à un autre d'une frontière S change le signe de K, dont la définition (14) comprend la normale n_α orientée dans la direction du domaine v où l'on calcule les fonctions de Green. Comme K^2 seul intervient après regroupement de $\mathbf{\Gamma}$ et Ξ, les densités de modes à l'intérieur et à l'extérieur d'une frontière S se calculent selon (16), et selon l'équation (21) ci-dessous, avec le *même intégrant*.

3 Passages à la limite

Afin de tirer part de ces propriétés, nous allons exprimer l'énergie libre (6) en termes de $\mathbf{\Gamma}$ et Ξ dans le plan complexe k. Pour cela, nous introduisons la *fonction génératrice des modes* :

$$\delta\Phi(k) = \frac{1}{2} \int d^3r \text{ tr } \lim_{r' \to r} \sum_v [\mathbf{\Gamma}^{(v)}(r, r' \,; k) + \Xi^{(v)}(r, r' \,; k)] \ . \qquad (21)$$

La somme porte, comme dans (5), sur les divers domaines connexes v délimités par les surfaces S et Σ, moins le volume entier contenu dans Σ. L'intégrale sur r porte sur ce volume entier. Grâce à ce regroupement, les termes $\mathbf{\Gamma}_0(r - r') = \Xi_0(r - r') = M\mathbf{j}_0$, identiques pour chacun des domaines et dont la partie réelle diverge lorsque $r' \to r$, se compensent de sorte que $\delta\Phi(k)$ est fini. Comme $\mathbf{\Gamma}$ et Ξ, cette fonction n'a comme singularités que des pôles aux points $k = \pm q_m$, $k = \pm q'_{m'}$ de l'axe réel, avec pour résidus $\mp\frac{1}{2}q_m$, $\pm\frac{1}{2}q'_{m'}$, de sorte que 2Im $\delta\Phi(q + \text{i}0) = \pi q \; \delta\rho(q)$. En notant que les champs statiques associés au voisinage de $k = 0$ ne contribuent pas à l'effet Casimir, l'expression (1), (5), (6) s'écrit en termes de $\Phi(k = q + \mathrm{i}0)$ selon

$$F_{\mathrm{reg}} = \frac{2T}{\pi} \,\mathrm{Im} \int_0^{\infty+\mathrm{i}0} dk \, \frac{\delta\Phi(k) - \delta\Phi(\mathrm{i}0)}{k} \ln \left(2 \,\mathrm{sh} \frac{\hbar c k}{2T} \right) \chi(k) \ ; \tag{22}$$

la soustraction assure la convergence à l'origine de l'intégrale.

Afin de bénéficier de la convergence pour $\mathrm{Im}\ k > |\mathrm{Re}\ k|$ des séries (18) et (20) dans (21) et (22), on va déformer le contour de (22) vers l'axe des imaginaires. On introduit pour cela la fonction

$$\Psi(y) = \lim_{\Sigma \to \infty} \delta\Phi(\mathrm{i}y). \tag{23}$$

Le passage à la limite $\Sigma \to \infty$, qui fait *disparaître la coupure spatiale* confinant le système étudié, est assuré grâce au fait que dans le développement en diffusions multiples de (21) issu de (18) et (20), tous les termes comportant seulement des diffusions sur Σ se compensent dans la différence (5). Parmi les termes restants, ceux qui comportent au moins un aller et retour entre S et Σ comprennent le facteur $\exp[-2\mathrm{Im}\ k\ L]$ où L est la distance minimale entre S et Σ ; ils disparaissent donc lorsqu'on envoie Σ à l'infini. Enfin, ceux qui ne comportent que des diffusions sur S comprennent avant l'intégration sur r de (21) un facteur exponentiel semblable, où L est la distance minimale entre r et S, de sorte que cette intégrale converge. Lors de ce passage à la limite, les pôles sur l'axe réel de $[\delta\Phi(k) - \delta\Phi(0)]/k$, de résidus $\pm\frac{1}{2}$, qui sont contournés dans l'intégrale (22), deviennent denses et sont remplacés par une coupure.

Il reste encore à se débarrasser de la *coupure ultraviolette* $\chi(k)$ qui élimine les hautes fréquences. Afin de pouvoir déformer le contour de (22) vers la demi-droite $[0, \mathrm{i}\infty + 0]$ où se trouvent les singularités du logarithme, on choisit pour $\chi(k)$ une fonction méromorphe de la forme

$$\chi(k) = \sum_i \left(\frac{a_i}{k^2 - \mu_i^2} + \frac{a_i^*}{k^2 - \mu_i^{*2}} \right), \tag{24}$$

dont les pôles μ_i dans le premier quadrant tendront vers l'infini, et dont les résidus satisfont à

$$\sum_i \mathrm{Re}\ a_i = 0, \ -2 \sum_i \mathrm{Re}\ (a_i/\mu_i^2) = 1, \tag{25}$$

de sorte que $\chi(q)$ est voisin de 1 tant que q est petit devant les $|\mu_i|$, et décroît comme q^4 lorsque q est grand devant les $|\mu_i|$. Ce comportement assure la convergence de (6), car on montre que pour q grand $\delta\rho(q)$ comporte des contributions oscillantes d'amplitude au plus égale à $q^{3/2}$. La déformation du contour fait aussi intervenir le comportement de $\delta\phi(k)$ lorsque $k \to \infty$ dans le premier quadrant ou de $\Psi(y)$ pour y grand. Pour une surface S deux fois différentiable, on trouve

$$\Psi(y) = \frac{1}{32\pi} \int_S d^2\alpha \left(\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{3}{R^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2} \right), \tag{26}$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de *courbure* principaux et $1/R$ la courbure moyenne au point α. Cette expression est issue du premier terme $MK^2\,\mathbf{j}_0$ des développements (18) et (20) donnant une contribution non nulle à (21). Enfin, près de l'origine, Ψ se comporte selon

$$\Psi(y) \approx -n(1 - Ay) + \mathcal{O}(y^2), \tag{27}$$

où n est le genre de S, associé à sa *topologie* ($n = 0$ pour une sphère, $n = 1$ pour un tore) et où $A > 0$.

4 Expression finale de l'énergie libre Casimir

En définitive, en utilisant ces diverses propriétés, on arrive à trouver la limite de (6) pour $\chi(q) \to 1$ et $\Sigma \to \infty$, sous la forme :

$$F = \frac{\hbar c}{\pi} \int_0^\infty dy[\Psi(y) - \Psi(\infty)] + 2T \int_0^\infty \frac{dy}{y}[\Psi(y) - \Psi(+0)]g(y), \tag{28}$$

où $g(y)$ est la fonction en dents de scie,

$$g(y) = \frac{1}{2} - \frac{y}{\eta} + \sum_{n=1}^{\infty} \theta(y - n\eta) \ , \ \eta = \frac{2\pi T}{\hbar c} \ . \tag{29}$$

Une expression fermée pour $\Psi(y)$ s'obtient en intégrant (21) sur r dans l'espace entier. On a noté que l'intégrant est le même dans toutes les régions délimitées par S, de sorte que cette intégrale ne dépend que du premier et du dernier point de diffusion sur S dans les développements (18) et (20) ; il fournit simplement

$$\Psi(y) = \frac{1}{2} \ \mathrm{Tr} \ \frac{K}{1 - K^2} \ y \ \frac{dK}{dy} \ . \tag{30}$$

Le noyau $K(k)$ où $k = \mathrm{i}y$, qui agit sur la surface S, a été défini par (11), (14). Il est réel. La trace dans (30) signifie la sommation sur les indices tensoriels et l'intégration sur S. Le long de l'axe d'intégration de (28), la série géométrique $(1 - K^2)^{-1}$ converge. Les valeurs de $\Psi(y)$ aux bornes de l'intervalle d'intégration de (28) sont données par (26) et (27).

5 Conditions d'existence d'un effet Casimir universel

Nous avons ainsi réussi à *prouver l'existence* d'un effet Casimir associé au champ seul en présence de parois minces parfaitement conductrices S, et à trouver une *expression fermée* (28) pour l'énergie libre correspondante, en fonction de la forme de S qui apparaît à travers $\Psi(y)$, et de la température qui apparaît à travers $Tg(y)$. Nous exploiterons dans la suite cette expression.

Il importe de noter que l'effet Casimir *n'existe qu'en raison de la nature électromagnétique* du champ. Notre démonstration a en effet utilisé le fait que les deuxièmes termes $\pm MK\mathbf{j}_0$ des développements (17) et (18) se compensent, de sorte que le développement en diffusions multiples de la densité de modes commence par un terme à *deux* diffusions, proportionnel au carré de la courbure selon (26). Or, pour un champ scalaire par exemple, la densité de modes à l'intérieur de chaque partie connexe de S ferait intervenir un terme à *une* diffusion, proportionnel à l'aire de S et donc (pour des raisons dimensionnelles) à q. Les contributions des deux faces de S s'ajouteraient, de sorte que l'expression (6) de F_{reg} comprendrait un terme en $\int dq \ q^2 \ \chi(q)$. Elle *dépendrait crucialement du facteur de coupure et divergerait* à la limite $\chi(q) \to 1$ du conducteur parfait. On ne pourrait associer une énergie libre au champ seul.

On peut comprendre l'absence de terme de surface pour le champ électromagnétique en notant que, pour un champ scalaire, le terme de surface dans la densité de modes change de signe si l'on passe de la condition au bord de Dirichlet (annulation) à celle de Neumann (annulation de la dérivée). Or, pour un champ électromagnétique, compte tenu de la contrainte $\mathrm{div}\mathbf{E} = 0$, les conditions aux limites vectorielles $\mathbf{E}_{\mathrm{t}} = 0$, $(\mathrm{rot}\ \mathbf{E})_{\mathrm{n}} = 0$ équivalent à deux conditions scalaires, l'une de Dirichlet, l'autre de Neumann, ce qui conduit à la compensation.

La densité de modes électromagnétiques dans une cavité de volume V se comporte en fait comme

$$\rho(q) \sim \frac{1}{\pi^2} V q^2 - \frac{2}{3\pi^2} \int \frac{d^2\alpha}{R} + \mathcal{O}(\frac{1}{q^2}) \tag{31}$$

pour $q \to \infty$, si l'on fait abstraction de termes oscillants. Non seulement le terme de volume et de surface, mais aussi le terme de courbure disparaissent de $\delta\rho$ car les courbures moyennes $1/R$ des deux faces de S sont opposées et donnent des contributions qui se compensent.

La limite $\chi(q) \to 1$ d'une conductivité infinie a pu être menée à bien ci-dessus uniquement pour des surfaces S de *courbure finie.* De fait, l'effet Casimir *n'existe pas* pour des surfaces présentant des *angles dièdres*, par exemple un cube creux, ou encore pour des feuilles présentant un *bord*, ce qui équivaut à un dièdre d'angle 2π. En effet, dans ces cas, il n'y a pas compensation entre les termes de courbure associés à l'extérieur et à l'intérieur du dièdre ; F_{reg} est dominé par un terme positif, proportionnel à $\int_0^\infty q\, dq\, \chi(q)$ qui *diverge* à la limite d'un conducteur parfait.

La même divergence apparaît si S comporte des dièdres accolés, par exemple trois demi-plans accolés le long de leur bord comme dans un nid d'abeilles. Mais pour 3 à 9 dièdres accolés d'angles égaux, le coefficient du facteur divergent est négatif de sorte que F_{reg} n'est pas *borné inférieurement* lorsque $\chi(q) \to 1$.

Les deux termes de (28) représentent deux phénomènes différents. Le premier est *l'énergie Casimir proprement dite*, associée à la *variation de l'énergie de point zéro* des modes du champ induite par l'introduction des conducteurs parfaits S ; c'est le produit de $\hbar c$ par un facteur de dimension L^{-1} dépendant de la forme de S. Le second est la *variation de l'énergie libre du corps noir* portée par le gaz de *photons*, qui ne présente pas de divergence ultraviolette. La température T correspondante est *celle des parois*, parcourues de *courants aléatoires en équilibre avec les photons.*

6 Plaques parallèles

Dans le cas de deux plaques parallèles distantes de l et d'aire S, la fonction $\Psi(y)$ vaut

$$\Psi(y) = \frac{Sy^2}{2\pi} \ln(1 - \mathrm{e}^{-2yl}) \ , \tag{32}$$

et l'on retrouve pour $T = 0$ l'énergie Casimir élémentaire. Le développement à basse température de l'énergie libre,

$$F(T) = -\frac{S\pi^2\hbar c}{720\, l^3} - \frac{ST^3}{2\pi\ \hbar^2 c^2}\zeta(3) + \frac{S\pi^2 l T^4}{45\hbar^3 c^3} + \mathcal{O}(T^2 \mathrm{e}^{-\pi\hbar c/lT}) \ , \tag{33}$$

montre que la force Casimir attractive $-\partial F/\partial l$ croît avec la température. La comparaison des expressions (22) et (32) fait apparaître une *dualité entre basses et hautes températures*

$$F(T) - F(0) = \left(\frac{2lT}{\hbar c}\right)^4 \left[F\left(\frac{\hbar^2 c^2}{4l^2 T}\right) - F(0)\right] \ . \tag{34}$$

A haute température, on a

$$F(T) = -\frac{ST}{8\pi l^2}\zeta(3) + \mathcal{O}(T^2 \mathrm{e}^{-4\pi lT/\hbar c}) \ , \tag{35}$$

qui montre que la force entre plaques est encore *attractive.*

L'entropie $-\partial F/\partial T$ croît à basse température comme $3ST^2\zeta(3)/2\pi\hbar^2c^2$, indépendamment de la distance l entre plaques, et tend à haute température vers la *limite finie* $S\zeta(3)/8\pi l^2$.

7 Basses températures

Les oscillations de plus en plus rapides de $g(y)$ lorsque $T \to 0$ permettent d'évaluer le second terme de (28) en développant $\Psi(y)$ en puissances de y autour de l'origine. On obtient

$$F(T) - F(0) = \frac{\pi T^2}{3\hbar c}\Psi'(0) - \frac{\pi^3 T^4}{135\hbar^3 c^3}\Psi'''(0) + \mathcal{O}(T^6) \ . \tag{36}$$

Ce comportement est lié à la *topologie* de la surface S, puisque selon (27) $\Psi'(0)$ s'annule pour une surface simplement connexe, et vaut nA pour une surface multiplement connexe, auquel cas il existe des *champs magnétiques statiques* pouvant être engendrés par des supercourants permanents sur S. L'entropie à basse température n'est alors pas proportionnelle à T^3 comme pour le corps noir, mais à T. Ce résultat reste mal compris puisque son coefficient $-2\pi\ n\ A/3\hbar c$ est négatif et que l'entropie de tout système quantique doit être positive. Certes, cette contribution s'ajoute à l'entropie du vide qui est proportionnelle au volume de celui-ci et à T^3. Mais que se passe-t-il pour l'entropie totale du système enfermé dans une enceinte Σ *finie* lorsque $T \to 0$?

Le paramètre sans dimension du développement (36) est $lT/\hbar c$ où l est la taille du système S. Les termes d'ordre le plus bas devraient être expérimentalement accessibles puisque ce paramètre vaut 0,5 pour $T = 1\text{K}$ et $l = 1\text{mm}$.

La différence de comportement entre (33) et (36) provient du fait que (36) ne s'applique qu'à un système S fini, alors que pour un système infini tel qu'une paire de plaques parallèles $\Psi'''(y)$ diverge lorsque $y \to 0$ comme le montre (32).

8 Hautes températures

A haute température, le second terme de (28) est dominé par la première des dents de scie de $g(y)$. Le calcul fournit alors

$$F = -\mathcal{C}T \ln(T/\hbar cQ) + \mathcal{O}(T^{-1}) \ , \tag{37}$$

$$\mathcal{C} = \Psi(+0) - \Psi(\infty) = \frac{1}{32\pi}\int_S d^2\alpha \left(\frac{3}{R^2} - \frac{1}{R_1R_2}\right) - n \ , \tag{38}$$

$$\int_0^\infty dy \ln\left(\frac{y}{Q}\right) \Psi'(y) = 0 \ . \tag{39}$$

Ici le paramètre sans dimension $\hbar c/TR$ du développement (37) est gouverné par une longueur associée aux courtes portées pour le noyau K, c'est-à-dire un rayon de courbure typique R de S, qui peut être beaucoup plus petit que sa taille typique l si cette surface est ondulée.

Le terme dominant de (37) est formellement le même que l'énergie libre d'un nombre $\mathcal{C}$ *d'oscillateurs harmoniques classiques* de *fréquence moyenne* $cQ/2\pi$. Contrairement à ce qui se passe pour le corps noir, auquel cas la mécanique quantique est nécessaire à toute température, la contribution F que nous venons de calculer, qui correspond à la déviation apportée à l'énergie libre du rayonnement lorsqu'on introduit les parois S, prend une forme *classique* pour $T \gg \hbar c/R$. L'énergie interne $U \sim \mathcal{C}T$ exprime *l'équipartition* classique, et comme d'habitude à la limite classique, l'entropie $\mathcal{C}\ln(\mathrm{e}T/\hbar cQ)$ dépend pour sa constante additive de la constante de Planck. Le nombre $\mathcal{C}$, positif ou négatif, s'interprète comme le *nombre moyen de modes* de fréquence finie rajoutés par introduction des surfaces S. Ici encore, la *topologie* de S apparaît dans l'expression (38) de $\mathcal{C}$, à travers le genre n de S (le nombre de champs magnétiques statiques indépendants est $2n$) et l'entier $\int d^2\alpha/4\pi R_1R_2$. Pour deux plans parallèles, on a $\mathcal{C} = 0$ et $\mathcal{C}\ln\ Q = -S\zeta(3)/8\pi l^2$.

Les *contraintes* Casimir sur les conducteurs S d'ordre $T\ln T$ sont obtenues à haute température en examinant comment $\mathcal{C}$ varie lorsque ces conducteurs se déplacent ou se déforment. Ces contraintes tendent à faire décroître F, donc croître $\mathcal{C}$. La seule partie non topologique de $\mathcal{C}$, $3\int d^2\alpha/(32\pi R^2)$, ne dépend pas des positions relatives des conducteurs ; il n'y a donc pas entre conducteurs différents de forces dues au champ, grandes comme $T\ln T$ à haute température. L'invariance de $\mathcal{C}$ par homothétie montre aussi l'absence à cet ordre de forces tendant à faire se contracter ou se dilater les conducteurs S. Cependant, $\mathcal{C}$ croît avec la courbure moyenne $1/R$ de S, de sorte que l'effet Casimir *tend à haute température à froisser les surfaces conductrices.* Cette tendance est limitée par les termes suivants du développement (37), R ayant tendance à décroître jusqu'à des valeurs de l'ordre de $\hbar c/T$.

Les contributions suivantes aux contraintes, d'ordre T, sont associées aux variations de la contribution

$$\mathcal{C}T \ln Q = -T \int_0^\infty dy \ln y \ \Psi'(y) \tag{40}$$

à F. Etant donné que Q^{-1} est proportionnel à la taille de S, ces forces Casimir d'ordre T tendent à contracter S si $\mathcal{C}$ est négatif, à le dilater si $\mathcal{C}$ est positif.

9 Autres exemples

L'expression (28) permet d'évaluer l'effet de parois minces conductrices sur l'énergie du champ (réel ou virtuel) de photons dans diverses circonstances. Nous passons ici en revue plusieurs questions traitées en détail dans l'article cité plus haut.

L'étude de l'énergie libre (28) lorsque S est un *plan légèrement déformé* confirme l'effet de froissement signalé ci-dessus : les contraintes exercées dans ce cas par le champ tendent à température finie à créer des ondulations de longueur d'onde supérieure à $2,9\hbar c/T$. Cependant, l'effet Casimir proprement dit, à température nulle, tend au contraire à redresser la surface. Ainsi, une *feuille plane conductrice* est *stable à température nulle, instable à température finie* par rapport à de petites déformations.

Ce phénomène est confirmé par l'étude de la répartition spatiale de l'énergie libre du champ électromagnétique. *La densité d'énergie libre Casimir* s'obtient de la même façon que l'énergie totale (28), mais en n'effectuant pas l'intégration sur le point r qui apparaissait dans (21). En effet, compte tenu de la représentation spectrale des fonctions de Green magnétique $\mathbf{\Gamma}$ et électrique $\mathbf{\Xi}$, la contribution de chaque pôle $k = q_m$ est alors pondérée par $\frac{1}{2}[\mathbf{B}_m^2(r) + \mathbf{E}_m^2(r)]$. (Les coefficients μ_0^{-1} et ϵ_0 réapparaissent lorsqu'on exprime les champs reliés par (3) en termes des fonctions réelles normalisées $\mathbf{B}_m$, $\mathbf{E}_m$.) Près d'une surface conductrice de courbure moyenne $1/R$ et à la distance $d \ll |R|$ de celle-ci, on trouve une densité d'énergie libre $f(d)$ égale à basse température à

$$f(d) = -\frac{\hbar c}{30\pi^2 R d^3} + \frac{T^3 \zeta(3)}{2\pi R \hbar^2 c^2} + \cdots \ , \tag{41}$$

et à haute température à

$$f(d) = \frac{T}{16\pi R d^2}\left[\ln(2dT/\hbar c) + C - \frac{1}{4}\right] + \cdots \ , \tag{42}$$

où C est la constante d'Euler. Cette densité *diverge* lorsque $d \to 0$, près de la surface S ; l'énergie libre qui serait associée à *l'un des domaines* délimités par S serait *infinie* (positive d'un côté, négative de l'autre). L'énergie libre totale reste finie grâce au changement de signe de R de part et d'autre. Cependant, le signe de (41) montre que la présence d'un conducteur transfère une quantité infinie *d'énergie de point zéro du côté concave vers le côté convexe*, alors qu'au contraire, selon (42), *l'énergie des photons* est transférée *du côté convexe vers le côté concave*. Ces comportements opposés sont cohérents avec la stabilité ou l'instabilité d'une paroi plane selon la température.

Les forces Casimir entre *conducteurs éloignés*, attribuées dans le présent traitement au champ électromagnétique, peuvent aussi être attribuées aux *fluctuations des courants* circulant dans ces conducteurs et produisant le champ. Ces forces apparaissent donc comme ayant la même nature que les *forces de van der Waals* d'induction mutuelle. On trouve entre deux conducteurs à la distance l grande, une *force attractive* en $1/l^8$ à température nulle, en $1/l^7 T$ à haute température, ainsi que des couples. Il en est de même pour la force entre un petit conducteur et un plan miroir.

L'étude de l'effet Casimir pour une *couche sphérique* S de rayon R montre que l'énergie à température nulle se comporte comme

$$E = 0,046\hbar c/R \ . \tag{43}$$

A haute température, on obtient, en accord avec (37),

$$F = -\frac{T}{4}[\ln(TR/\hbar c) + 0,769] - \left(\frac{\hbar c}{R}\right)^2 \frac{1}{3840T} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^3}\right) \ . \tag{44}$$

A toute température, l'effet Casimir tend à *dilater la sphère*, avec une pression croissant avec la température : la pression exercée par le champ intérieur l'emporte sur celle exercée par le champ extérieur.

Ce comportement contraste avec celui de la force Casimir entre plaques parallèles, qui tend à les rapprocher.

Une situation intermédiaire est celle du *cylindre*. Des tests numériques, en particulier sur le plan et la sphère, montrent que F est obtenu avec une excellente approximation en limitant à l'ordre le plus bas le développement en puissances de K^2 de l'expression (30) pour $\Psi(y)$, ce qui correspond à *deux diffusions* sur S. Cette approximation fournit pour un cylindre de rayon R et de longueur L, à basse température,

$$F^{(2)} \sim -\frac{2\pi^3 \ L \ R^2 \ T^4}{45\hbar^3 \ c^3} \ , \tag{45}$$

et à haute température

$$F^{(2)} \sim -\frac{3LT}{64 \ R} \ln \frac{4,56TR}{\hbar c} \ , \tag{46}$$

en accord avec (37). A haute température, le cylindre tend à s'amincir. A température nulle, on trouve $F^{(2)} = 0$: l'énergie Casimir (à cet ordre) est *nulle* pour le cylindre, alors qu'elle est négative pour deux plaques parallèles, positive pour une sphère.

Tous ces effets, en particulier l'instabilité de froissement, sont malheureusement difficiles à tester expérimentalement, en raison de la faiblesse des forces Casimir devant les forces de cohésion qui assurent la stabilité de feuilles métalliques.