Poincaré et le hasard

Laurent MAZLIAK

Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

EXAMEN CRITIQUE DES DIVERS SYSTEMES OU ETUDES GRAPHOLOGIQUES AUXQUELS A DONNE LIEU LE BORDEREAU.

(RAPPORT DE MM. DARBOUX, APPELL ET POINCARE.)

ORDONNANCE

LA COUR DE CASSATION, CHAMBRE CRIMINELLE,

Vu son arrêt en date du 5 mars 1904, ordonnant qu'avant dire droit sur la demande en revision du jugement du conseil de guerre de Rennes du 9 septembre 1899, une instruction supplémentaire sera suivie conformément à l'article 445 du Code d'instruction criminelle ;

Attendu qu'il importe de procéder à l'examen critique de divers systèmes ou études graphologiques auxquels a donné lieu la pièce dite *bordereau* — de ceux notamment qui ont été présentés soit officiellement, soit officieusement, par MM. Bertillon, Valerio, Corps, et par « un ancien élève de l'Ecole polytechnique (imprimerie Hardy et Bernard, 80, rue de Bondy, 1904) ».

Ordonne qu'il soit ce fait par MM. Poincaré, Darboux et Appell, serment préalablement prêté, conformément à l'article 44 du Code d'instruction criminelle, devant le Président de cette Chambre, de faire leur rapport et de donner leur avis en leur honneur et conscience ;

Dit, en conséquence, que — pour l'accomplissement de leur mission — MM. les Experts pourront, d'une part, se mettre en rapport avec les auteurs (susdésignés et autres, s'il y échet) des systèmes ou études précités, afin de provoquer de leur part toutes précisions ou explications ; — qu'ils sont admis, d'autre part, à faire appel aux concours techniques qui leur paraîtraient utiles, tels que celui, s'il y a lieu, du Bureau des Longitudes, et à mettre en œuvre, en

Alphonse Bertillon

(1853-1914)


2° une note sur les troupes de couverture
(quelques modifications seront apportées par
le nouveau plan);
3° une note sur une modification aux
formations de l'artillerie;
4° une note relative à Madagascar.
(14 mars 1894.)
Ce dernier document est extrêmement
difficile à se procurer et je ne puis
l'avoir à ma disposition que très peu
de jours. Le ministère de la guerre

p. 337

RAPPORT

DE

MM. LES EXPERTS DARBOUX, APPELL ET POINCARÉ.

INTRODUCTION

NOTIONS SUR LA PROBABILITÉ DES CAUSES

Le système de M. Bertillon, ainsi que les autres systèmes soumis à notre examen, ont la prétention d'être une appli-

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

THERMODYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ,
Membre de l'Institut.

RÉDACTION DE

J. BLONDIN,
Agrégé de l'Université.

DEUXIÈME ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

But the most unsatisfactory part of the whole work is, it seems to us, the entire ignoration of the true (i.e. the statistical) basis of the second Law of Thermodynamics. According to Clerk-Maxwell (Nature, xvii. 278) "The touch-stone of a treatise on Thermodynamics is what is called the second law." We need not quote the very clear statement which follows this, as it is probably accessible to all our readers. It certainly has not much resemblance to what will be found on the point in M. Poincaré's work : so little, indeed, that if we were to judge by these two writings alone it would appear that, with the exception of the portion treated in the recent investigations of v. Helmholtz, the science had been retrograding, certainly not advancing, for the last twenty years

(Peter Gunthrie Tait, Nature, January 1892)

But the most unsatisfactory part of the whole work is, it seems to us, the entire ignoration of the true (i.e. the statistical) basis of the second Law of Thermodynamics. According to Clerk-Maxwell (Nature, xvii. 278) "The touch-stone of a treatise on Thermodynamics is what is called the second law." We need not quote the very clear statement which follows this, as it is probably accessible to all our readers. It certainly has not much resemblance to what will be found on the point in M. Poincaré's work : so little, indeed, that if we were to judge by these two writings alone it would appear that, with the exception of the portion treated in the recent investigations of v. Helmholtz, the science had been retrograding, certainly not advancing, for the last twenty years

(Peter Gunthrie Tait, Nature, January 1892)

J'ai laissé complètement de côté une explication mécanique du principe de Clausius que M. Tait appelle "the true (i.e. statistical) basis of the second Law of Thermodynamics." Je n'ai pas parlé de cette explication, qui me paraît d'ailleurs assez peu satisfaisante, parce que je désirais rester complètement en dehors de toutes les hypothèses moléculaires quelque ingénieuses qu'elles puissent être; et en particulier j'ai passé sous silence la théorie cinétique des gaz.'

(Poincaré à Nature, 17 mars 1892)

1. Poincaré, physicien
   - Le théorème de récurrence
   - Théorie cinétique des gaz
2. Les travaux probabilistes
   - Cours de probabilités
   - Méthode des fonctions arbitraires
   - Battage des cartes
3. L'héritage
   - Borel
   - La descendance markovienne

1. Poincaré, physicien

Charles Hermite
(1822-1901)

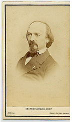
Charles Hermite
(1822-1901)

Paul Appell
(1855-1930)

Emile Picard
(1855-1941)

Henri Poincaré
(1854-1912)

Joseph Liouville
Mécanique Rationnelle



Charles Briot
Calcul des Probabilités et Physique mathématique

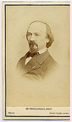
Victor Puiseux
Astronomie mathématique

Jean-Claude Bouquet
Mécanique physique et expérimentale

Paul Desains
Physique Enseignement

Jules Jamin
Recherches physiques

Joseph Liouville (1809-1882)
Mécanique Rationnelle



Charles Briot (1817-1882)
Calcul des Probabilités et Physique mathématique

Victor Puiseux (1820-1883)
Astronomie mathématique

Jean-Claude Bouquet (1819-1885)
Mécanique physique et expérimentale

Paul Desains (1817-1885)
Physique Enseignement

Jules Jamin (1818-1886)
Recherches physiques

Joseph Boussinesq
(1842-1929)

OSCARI II

REGI AUGUSTISSIMO

QUUM MATHEMATICES ALIARUMQUE ARTIUM

VEL FAUTORI VEL CULTORI ERUDITISSIMO

TUM HUJUS OPERIS IAM INDE AB INITIO

AUSPICI LIBERALISSIMO

DEBITUM PIETATIS MUNUS

D. D. D.

EDITOR

Points mobiles se déplaçant suivant les équations de la mécanique, de telle sorte que le volume total reste invariant dans le temps.
Exemple : molécules d'un fluide incompressible : forme change, pas le volume
Hypothèse : les points restent dans E zone bornée de l'espace

Si on considère r_0 une région de l'ensemble E, aussi petite soit-elle, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

On discrétise le temps avec un pas d'amplitude τ.
$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$: suite des conséquentes de r_0 aux temps $\tau, 2\tau, \ldots, n\tau, \ldots$
Antécédente de r' = région dont r' est la conséquente.
Régions r_i ont même volume et $\subset E$ borné $\Rightarrow$ s'intersectent
$r_p \cap r_q = s_1$ ($p < q$) : un point qui part de s_1 est dans s_1 au temps $(q-p)\tau$.
On remonte le temps : $r_0^1 \subset r_0$ dont s_1 est la p-ième conséquente.
Point partant de r_0^1 y retournera au temps $(q-p)\tau$.
On recommence en remplaçant r_0 par r_0^1.
Suite emboîtée $(r_0^n) \subset r_0$ t.q. tout point partant de r_0^n y revient n fois au moins.
Un point partant de l'intersection des r_0^n repassera une infinité de fois dans r_0

Corollaire. Il résulte de ce qui précède qu'il existe une infinité de trajectoires qui traversent une infinité de fois la région r_0; mais il peut en exister d'autres qui ne traversent cette région qu'un nombre fini de fois. Je me propose maintenant d'expliquer pourquoi ces dernières trajectoires peuvent être regardées comme exceptionnelles.

Cette expression n'ayant par elle-même aucun sens précis, je suis obligé d'abord d'en compléter la définition.

Nous conviendrons de dire que la probabilité pour que la position initiale du point mobile P appartienne à une certaine région r_0 est à la probabilité pour que cette position initiale appartienne à une autre région r'_0 dans le même rapport que le volume de r_0 au volume de r'_0.

Les probabilités étant ainsi définies, je me propose d'établir que la probabilité pour qu'une trajectoire issue d'un point de r_0 ne traverse pas cette région plus de k fois est nulle, quelque grand que soit k et quelque petite que soit la région r_0. C'est là ce que j'entends quand je dis que les trajectoires qui ne traversent r_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles.

Je suppose que la position initiale du point P appartienne à r_0 et je me propose de calculer la probabilité pour que la trajectoire issue de ce point ne traverse pas $k + 1$ fois la région r_0 depuis l'époque 0 jusqu'à l'époque $n\tau$.

Nous avons vu que si le volume v de r_0 est tel que:

$$n > \frac{kV}{v}$$

on pourra trouver $k + 1$ régions que j'appellerai

$$r_0, r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \ldots, r_{\alpha_k}$$

et qui auront une partie commune. Soit s_{α_k} cette partie commune, soit s_0 son antécédente d'ordre α_k; et désignons par s_p la p^e conséquente de s_0.

Je dis que si la position initiale du point P appartient à s_0, la trajectoire issue de ce point traversera $k + 1$ fois au moins la région r_0 entre l'époque 0 et l'époque $n\tau$.

En effet le point mobile qui décrit cette trajectoire se trouvera à l'époque 0 dans la région s_0, à l'époque $p\tau$ dans la région s_p, à l'époque

2e ANNÉE N° 1 15 JANVIER 1891

REVUE GÉNÉRALE

DES SCIENCES

PURES ET APPLIQUÉES

DIRECTEUR : LOUIS OLIVIER

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

La loi de Newton est la plus simple de toutes les lois physiques; mais elle a pour expression mathématique une équation différentielle, et pour obtenir les coordonnées des astres, il faut intégrer cette équation. Ce problème est un des plus difficiles de l'Analyse, et malgré les recherches persévérantes des géomètres, il est encore bien loin d'être résolu.

I

Quel sera le mouvement de n points matériels, s'attirant mutuellement en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré des distances? Si $n = 2$, c'est-à-dire si l'on a affaire à une planète isolée et au Soleil, en négligeant les perturbations dues aux autres planètes, l'intégration est facile; les deux corps décrivent des ellipses, en se conformant aux lois de Képler. La difficulté commence si le nombre n des corps est égal à trois; le *problème des trois corps* a défié jusqu'ici tous les efforts des analystes.

L'intégration complète et rigoureuse étant manifestement impossible, les astronomes ont dû procéder par approximations successives; l'emploi de cette méthode était facilité par la petitesse des masses des planètes, comparées à celle du Soleil. On a donc été conduit à développer les coordonnées des astres suivant les puissances croissantes des masses.

Ce mode de développement n'est pas sans inconvénient; je n'en citerai qu'un : supposons qu'il entre dans l'expression d'une de ces coordonnées un terme périodique dont la période soit très longue, et d'autant plus longue que les masses troublantes sont plus petites, et développons ce terme suivant les puissances croissantes des masses; quelque loin que nous poussions l'approximation, la valeur approchée de ce terme ira en croissant indéfiniment, tandis que la vraie valeur reste toujours finie. C'est ainsi qu'en développant sin mt suivant les puissances croissantes de m et négligeant les termes en m^3, on trouve $mt - \frac{1}{6}m^3t^3$, polynôme susceptible de croître indéfiniment, tandis que sin mt est toujours plus petit que 1. La véritable nature de la fonction est donc complètement dissimulée.

Cette méthode a été cependant jusqu'ici très suffisante pour les besoins de la pratique; les masses sont, en effet, tellement petites qu'on peut, le plus souvent, négliger leurs carrés et se borner ainsi à la première approximation.

Mais on ne peut espérer qu'il en soit toujours ainsi; il ne s'agit pas seulement, en effet, de calculer les éphémérides des astres quelques années d'avance pour les besoins de la navigation ou pour que les astronomes puissent retrouver les petites planètes déjà connues. Le but final de la Mécanique céleste est plus élevé; il s'agit de résoudre cette importante question : la loi de Newton peut-elle expliquer à elle seule tous les phénomènes astronomiques? Le seul moyen d'y parvenir est de faire des observations aussi précises que possible, de les prolonger pendant de longues années ou même de longs siècles et de les comparer ensuite aux résultats du calcul. Il est donc inutile de de-

Chaire de Physique Mathématique.

1887, 1. Théorie du Potentiel.
1887, 2. Théorie du Potentiel et Propagation de la Chaleur.
1888, 1. Théorie mathématique de la Lumière (284).
1888, 2. Théorie de Maxwell (286, 298).
1889, 1 Thermodynamique (291).
1889, 2. Capillarité (288).
1890, 1. Problème des Trois Corps.
1890, 2. Electrodynamique (278, 298).
1891, 1. Elasticité (289).
1891, 2. Electrostatique.
1892, 1. Optique (285).
1892, 2. Tourbillons (290).
1893, 1. Oscillations électriques (292).
1893, 2. Thermodynamique et théorie cinétique des gaz.

LE MÉCANISME ET L'EXPÉRIENCE

Tout le monde connait la conception mécaniste de l'univers qui a séduit tant de bons esprits et les différentes formes qu'elle a revêtues.

Les uns se représentent le monde matériel comme formé d'atomes qui se meuvent en ligne droite en vertu de leur inertie ; la vitesse ou la direction de ce mouvement ne peut changer que lorsque deux atomes se choquent.

Les autres admettent l'action à distance et supposent que les atomes exercent les uns sur les autres une attraction (ou une répulsion) qui dépend de la distance suivant une loi quelconque.

La première manière de voir n'est évidemment qu'un cas particulier de la seconde ; ce que je vais dire sera vrai de l'une et de l'autre. Les conclusions les plus importantes s'appliqueraient d'ailleurs au mécanisme cartésien où l'on suppose la matière continue.

Ce serait peut-être ici le lieu de discuter les difficultés métaphysiques que soulèvent ces conceptions; mais je n'aurais pas pour cela l'autorité nécessaire. Au lieu d'entretenir les lecteurs de cette revue de ce qu'ils savent mieux que moi, je préfère leur parler de sujets qui leur sont moins familiers mais qui peuvent cependant les intéresser indirectement.

Je vais donc m'occuper des obstacles que les mécanistes ont rencontrés quand ils ont voulu concilier leur système avec les faits expérimentaux et des efforts qu'ils ont faits pour les vaincre ou les tourner.

Dans l'hypothèse du mécanisme, tous les phénomènes doivent être *réversibles*; par exemple les astres pourraient parcourir leurs orbites dans le sens rétrograde sans que la loi de Newton fût violée; il en

April 28, 1892.

Mr. JOHN EVANS, D.C.L., LL.D., Treasurer and Vice-President, followed by The LORD KELVIN, President, in the Chair.

A List of the Presents received was laid on the table, and thanks ordered for them.

The following Papers were read:—

I. "On a Decisive Test-case disproving the Maxwell-Boltzmann Doctrine regarding Distribution of Kinetic Energy." By The LORD KELVIN, Pres. R.S. Received April 6, 1892.

The doctrine referred to is that stated by Maxwell in his paper "On the Average Distribution of Energy in a System of Material Points" ('Camb. Phil. Soc. Trans.,' May 6, 1878, republished in vol. 2 of Maxwell's 'Scientific Papers') in the following words:—

"In the ultimate state of the system, the average kinetic energy of two given portions of the system must be in the ratio of the number of degrees of freedom of those portions."

Let the system consist of three bodies, A, B, C, all movable only in one straight line, KHL:

B being a simple vibrator controlled by a spring so stiff that when, at any time, it has very nearly the whole energy of the system, its extreme excursions on each side of its position of equilibrium are small:

C and A, equal masses:

C, unacted on by force except when it strikes L, a fixed barrier, and when it strikes or is struck by B:

A, unacted on by force except when it strikes or is struck by B, and when it is at less than a certain distance, HK, from a fixed repellent barrier, K, repelling with a force, F, varying according to any law, or constant, when A is between K and H, but becoming infinitely great when (if at any time) A reaches K, and goes infinitesimally beyond it.

Suppose now A, B, C to be all moving to and fro. The collisions between B and the equal bodies A and C on its two sides must equalise, and keep equal, the average kinetic energy of A, immediately before and after these collisions, to the average kinetic energy of C. Hence, when the times of A being in the space between H and K are

5e ANNÉE — N° 14 — 30 JUILLET 1894

REVUE GÉNÉRALE

DES SCIENCES

PURES ET APPLIQUÉES

DIRECTEUR : LOUIS OLIVIER

SUR LA THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

Ce qui m'a donné l'idée d'écrire cet article, c'est l'étude d'une communication faite récemment par lord Kelvin à la Société Royale. Cette communication se rapporte à une question essentielle pour la théorie cinétique des gaz. Mais, comme cette théorie a été beaucoup moins cultivée par les physiciens français que par les anglais, il m'a semblé que le lecteur comprendrait mal la portée de l'objection de lord Kelvin, et les rapports qu'elle peut avoir avec les hypothèses sur la constitution des gaz, si je ne commençais par un exposé général des idées de Maxwell à ce sujet.

J'ai été ainsi conduit à développer un des points les plus importants de la théorie cinétique des gaz : mais un point particulier seulement. Peut-être reviendrai-je sur d'autres parties de la théorie, mais dans un autre article; celui-ci est déjà trop long.

Cette théorie mérite-t-elle les efforts que les Anglais y ont consacrés? On peut quelquefois se le demander; je doute que, dès à présent, elle puisse rendre compte de tous les faits connus. Mais il ne s'agit pas de savoir si elle est *vraie*; ce mot, en ce qui concerne une théorie de ce genre, *n'a aucun sens*. Il s'agit de savoir si sa fécondité est épuisée ou si elle peut encore aider à faire des découvertes. Or, on ne saurait oublier qu'elle a été utile à M. Crookes dans ses travaux sur la matière radiante, ainsi qu'aux inventeurs de la théorie de la pression osmotique. On peut donc encore se servir de l'hypothèse cinétique, pourvu qu'on n'en soit pas dupe. Aussi puis-je espérer qu'on voudra bien me pardonner la longueur de cet article et le caractère un peu technique que j'ai été obligé de lui donner.

I

L'idée fondamentale de la théorie cinétique des gaz est ancienne. On sait en quoi elle consiste : on se représente un gaz comme formé de molécules très nombreuses et très petites, animées de vitesses très grandes, ces molécules n'exerçant les unes sur les autres que des actions insensibles, sauf dans le cas où leur distance est extrêmement petite.

Il en résulte qu'une molécule décrira une trajectoire rectiligne, et qu'elle ne s'en écartera que dans deux cas, d'abord si elle vient à rencontrer la paroi du vase où le gaz est renfermé; tout se passe alors comme si, repoussée par cette paroi, elle rebondissait en suivant les lois du choc des corps élastiques. Notre molécule s'écartera encore de sa trajectoire rectiligne quand elle approchera assez d'une autre molécule pour que l'attraction de celle-ci devienne sensible; on dira alors que les deux molécules sont en collision. La durée des collisions sera très courte si l'on admet, comme nous l'avons fait, que l'attraction moléculaire ne se fait sentir qu'à une distance excessivement petite; nous admettrons de même qu'une molécule ne subit d'action de la part d'une paroi que quand elle en est extrêmement rapprochée; une collision d'une molécule contre une paroi sera donc aussi de très courte durée.

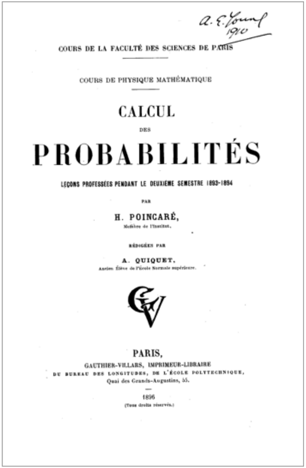
La trajectoire d'une molécule quelconque se

Cette théorie mérite-t-elle les efforts que les Anglais y ont consacrés? On peut quelquefois se le demander; je doute que, dès à présent, elle puisse rendre compte de tous les faits connus. Mais il ne s'agit pas de savoir si elle est vraie; ce mot en ce qui concerne une théorie de ce genre n'a aucun sens . Il s'agit de savoir si sa fécondité est épuisée ou si elle peut encore aider à faire des découvertes. Or, on ne saurait oublier qu'elle a été utile à M.Crookes dans ses travaux sur la matière radiante ainsi qu'aux inventeurs de la pression osmotique. On peut donc encore se servir de l'hypothèse cinétique, pourvu qu'on n'en soit pas dupe.

Cette théorie mérite-t-elle les efforts que les Anglais y ont consacrés? On peut quelquefois se le demander; je doute que, dès à présent, elle puisse rendre compte de tous les faits connus. Mais il ne s'agit pas de savoir si elle est vraie; ce mot en ce qui concerne une théorie de ce genre n'a aucun sens . Il s'agit de savoir si sa fécondité est épuisée ou si elle peut encore aider à faire des découvertes. Or, on ne saurait oublier qu'elle a été utile à M.Crookes dans ses travaux sur la matière radiante ainsi qu'aux inventeurs de la pression osmotique. On peut donc encore se servir de l'hypothèse cinétique, pourvu qu'on n'en soit pas dupe.

Je crois que le théorème de Maxwell est bien une conséquence nécessaire de son postulat, du moment qu'on admet l'existence d'un état moyen; mais le postulat lui-même doit comporter de nombreuses exceptions.

2. Les travaux probabilistes


a. E. Young
1910

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

CALCUL

DES

PROBABILITÉS

LEÇONS PROFESSÉES PENDANT LE DEUXIÈME SEMESTRE 1893-1894

PAR

H. POINCARÉ,
Membre de l'Institut.

RÉDIGÉES PAR

A. QUIQUET,
Ancien Élève de l'École Normale supérieure.

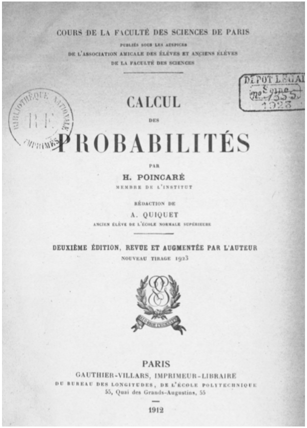
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896
(Tous droits réservés.)

La Chaire de Physique Mathématique a pour titre officiel: Calcul des Probabilités et Physique Mathématique. Ce rattachement peut se justifier par les applications que peut avoir ce calcul dans toutes les expériences de Physique; ou par celles qu'il a trouvées dans la théorie cinétique des gaz. Quoi qu'il en soit, je me suis occupé des probabilités pendant un semestre et mes leçons ont été publiées. La théorie des erreurs était naturellement mon principal but. J'ai dû faire d'expresses réserves sur la généralité de la "loi des erreurs"; mais j'ai cherché à la justifier, dans les cas où elle reste légitime, par des considérations nouvelles

La Chaire de Physique Mathématique a pour titre officiel: Calcul des Probabilités et Physique Mathématique. Ce rattachement peut se justifier par les applications que peut avoir ce calcul dans toutes les expériences de Physique; ou par celles qu'il a trouvées dans la théorie cinétique des gaz. Quoi qu'il en soit, je me suis occupé des probabilités pendant un semestre et mes leçons ont été publiées. La théorie des erreurs était naturellement mon principal but. J'ai dû faire d'expresses réserves sur la généralité de la "loi des erreurs"; mais j'ai cherché à la justifier, dans les cas où elle reste légitime, par des considérations nouvelles

[Cette loi] 'ne s'obtient pas par des déductions rigoureuses; plus d'une démonstration qu'on a voulu en donner est grossière, entre autres celle qui s'appuie sur l'affirmation que la probabilité des écarts est proportionnelle aux écarts. Tout le monde y croit cependant, me disait un jour M.Lippmann, car les expérimentateurs s'imaginent que c'est un théorème de mathématiques, et les mathématiciens que c'est un fait expérimental.



COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PUBLIÉS SOUS LES AUSPICES
DE L'ASSOCIATION AMICALE DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

CALCUL
DES
PROBABILITÉS

PAR
H. POINCARÉ
MEMBRE DE L'INSTITUT

RÉDACTION DE
A. QUIQUET
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

DEUXIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR
NOUVEAU TIRAGE 1923

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1912

Fonction caractéristique :
1) $f(\alpha) = \sum_x p_x e^{\alpha x}$ dans le cas discret *fini*
2) $f(\alpha) = \int \varphi(x) e^{\alpha x} dx$ dans le cas à densité.

CHAPITRE XI

LE CALCUL DES PROBABILITÉS

On s'étonnera sans doute de trouver, à cette place, des réflexions sur le calcul des probabilités. Qu'a-t-il à faire avec la méthode des sciences physiques ?

Et pourtant les questions que je vais soulever, sans les résoudre, se posent naturellement au philosophe qui veut réfléchir sur la physique.

Et c'est à tel point que, dans les deux chapitres précédents, j'ai été amené plusieurs fois à prononcer les mots de probabilité et de hasard.

« Les faits prévus, ai-je dit plus haut, ne peuvent être que probables. Si solidement assise que puisse nous paraître une prévision, nous ne sommes jamais absolument sûrs que l'expérience ne la démentira pas. Mais la probabilité est souvent assez grande pour que pratiquement nous puissions nous en contenter ».

Et un peu plus loin, j'ai ajouté :

« Voyons quel rôle joue dans nos généralisations la croyance à la simplicité. Nous avons vérifié une loi simple dans un grand nombre de cas particuliers ; nous nous refusons à admettre que cette rencontre si souvent répétée, soit un simple effet du hasard... »

Ainsi, dans une foule de circonstances, le physicien se trouve dans la même position que le joueur qui sup-

La science et l'hypothèse, 1902

CHAPITRE IV

Le hasard.

I

« Comment oser parler des lois du hasard? Le hasard n'est-il pas l'antithèse de toute loi? » Ainsi s'exprime Bertrand au début de son *Calcul des probabilités*. La probabilité est opposée à la certitude ; c'est donc ce qu'on ignore et par conséquent semble-t-il ce qu'on ne saurait calculer. Il y a là une contradiction au moins apparente et sur laquelle on a déjà beaucoup écrit.

Et d'abord qu'est-ce que le hasard? Les anciens distinguaient les phénomènes qui semblaient obéir à des lois harmonieuses, établies une fois pour toutes, et ceux qu'ils attribuaient au hasard ; c'étaient ceux qu'on ne pouvait prévoir parce qu'ils étaient rebelles à toute loi. Dans chaque domaine, les lois précises ne décidaient pas de tout, elles traçaient seulement les limites entre lesquelles il était permis au hasard de se mouvoir. Dans cette concep-

Science et Méthode, 1908

Trois sources du hasard

1) Ignorance d'une cause très petite que nous ne pouvons pas connaître mais qui produit un effet très grand

2) Complexité des causes qui nous interdit d'accéder à un ordre autre que statistique (comme dans la théorie cinétique des gaz),

3) Intervention d'une cause imprévue que nous avons négligée.

Comment saurons nous que deux cas possibles sont également probables? Sera-ce par une convention? Si nous plaçons au début de chaque problème une convention explicite, tout ira bien; nous n'aurons plus qu'à y appliquer les règles de l'arithmétique et de l'algèbre et nous irons jusqu'au bout du calcul sans que notre résultat puisse laisser place au doute. Mais, si nous voulons en faire la moindre application, il faudra démontrer que notre convention était légitime, et nous nous retrouverons en face de la difficulté que nous avions cru éluder.

Grand nombre de tours : variation infime de l'impulsion initiale fait changer de couleur
Revient au même : roulette divisée en un grand nombre de petits secteurs de longueur ε

<u>Convention</u> :
Probabilité pour que cet angle soit compris entre θ et $\theta + d\theta = \varphi(\theta)d\theta$
(φ est une fonction *arbitraire* mais *naturellement* continue)

Probabilité cherchée : l'intégrale de φ étendue à tous les secteurs rouges.
ε: longueur d'un secteur sur la circonférence,
Double secteur de longueur 2ε contenant un secteur rouge et un secteur noir.
M_k et m_k : max et min de φ sur le double secteur considéré.
ε petit et φ continue $\Rightarrow M_k - m_k \leq \delta$
Différence entre intégrales rouge et noire $\leq \sum_k (M_k - m_k)\varepsilon \leq 2\pi\delta$
Somme de ces deux intégrales = 1 $\Rightarrow$ chaque intégrale $\sim 1/2$.

ELEMENTARY PRINCIPLES

IN

STATISTICAL MECHANICS

DEVELOPED WITH ESPECIAL REFERENCE TO

THE RATIONAL FOUNDATION OF
THERMODYNAMICS

BY

J. WILLARD GIBBS
Professor of Mathematical Physics in Yale University

NEW YORK: CHARLES SCRIBNER'S SONS
LONDON: EDWARD ARNOLD
1902

Probabilité p pour qu'après un battement, même ordre qu'avant ; $q = 1 - p$ ordre changé.
n battements : le joueur gagne (après ces n battements) une somme S égale à

$$\begin{cases} \text{1 franc} & \text{si ordre inchangé} \\ \text{-1 franc} & \text{sinon} \end{cases}$$

$S = \prod_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_i = \pm 1$ indépendantes de loi (p, q)
Donc $E(S) = (p - q)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$ (sauf dans les cas triviaux $p = 0$ ou 1)
$\Rightarrow$ les deux ordres possibles ont tendance à devenir équiprobables.

CHAPITRE XVI.

QUESTIONS DIVERSES.

225. Battage des cartes. — Je me suis occupé dans l'introduction des problèmes relatifs au joueur qui bat un jeu de cartes. Pourquoi, quand le jeu a été battu assez longtemps, admettons-nous que toutes les permutations des cartes, c'est-à-dire tous les ordres dans lesquels ces cartes peuvent être rangées, doivent être également probables? C'est ce que nous allons examiner de plus près.

Soit q le nombre des cartes; soit S_i une permutation quelconque, c'est-à-dire l'opération qui consiste à faire passer au rang α la carte qui avant la permutation occupait le rang β; α étant une fonction déterminée de β. Le nombre total des permutations possibles est $q!$ Il y aura un certain ordre des cartes que nous considérerons comme normal, et que nous désignerons par S_0; et nous représenterons par S_i l'ordre dans lequel se trouveront rangées les cartes, lorsque, primitivement rangées dans l'ordre normal, elles subiront la permutation S_i. Ainsi S_0 représentera à la fois l'ordre normal, et la permutation *identique*, celle qui n'altère pas l'ordre des cartes. Cela posé, deux permutations consécutives S_i et S_j équivaudront à une permutation unique S_k, et c'est ce que j'exprimerai par la relation

$$S_i S_j = S_k. \tag{1}$$

3. L'héritage

Emile BOREL
(1871-1956)

REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE PROBABILITÉ;

Par M. Émile Borel.

1. On sait que les questions de probabilité où interviennent des variables continues ne peuvent acquérir de sens qu'en vertu de *conventions* précises. Comme le fait observer Joseph Bertrand, si une variable x est assujettie à rester comprise entre 0 et 1, son carré x^2 est assujetti aux mêmes conditions et la probabilité pour que x soit compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ est égale à la probabilité pour que x^2 soit compris entre 0 et $\frac{1}{4}$. Cela serait absurde (1) si l'on supposait à chacune de ces probabilités une valeur *intrinsèque*, c'est-à-dire définie objectivement d'une manière indépendante de toute convention.

(1) *Voir* Poincaré, *Calcul des probabilités*, 8e Leçon.

REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE PROBABILITÉ;

Par M. Émile Borel.

1. On sait que les questions de probabilité où interviennent des variables continues ne peuvent acquérir de sens qu'en vertu de *conventions* précises. Comme le fait observer Joseph Bertrand, si une variable x est assujettie à rester comprise entre 0 et 1, son carré x^2 est assujetti aux mêmes conditions et la probabilité pour que x soit compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ est égale à la probabilité pour que x^2 soit compris entre 0 et $\frac{1}{4}$. Cela serait absurde (¹) si l'on supposait à chacune de ces probabilités une valeur *intrinsèque*, c'est-à-dire définie objectivement d'une manière indépendante de toute convention.

(¹) *Voir* Poincaré, *Calcul des probabilités*, 8e Leçon.

Les méthodes de M. Lebesgue permettent d'étudier des questions de probabilités qui paraissent inaccessibles par les procédés d'intégration classique. D'ailleurs, dans les cas particuliers les plus simples, il suffira de se servir de la théorie des ensembles que j'avais appelés mesurables et auxquels M.Lebesgue a donné le nom de mesurables (B) ; l'application de cette théorie des ensembles mesurables au calcul des probabilités a été, à ma connaissance, faite pour la première fois par M. Wiman.

Revisiting the Sources of Borel's Interest in Probability: Continued Fractions, Social Involvement, Volterra's Prolusione

ANTONIN DURAND* and LAURENT MAZLIAK†

Abstract. In this paper, we revisit the origins of Emile Borel's developing interest in probability around 1905. This resulted from new findings in his research on continued fraction, but it also cannot be separated from the discovery of new applications for the mathematics of randomness (such as biology or economics) and of their importance as a life-changing tool for the citizen. In particular, we underline the role of a paper published by Vito Volterra in Borel's *Revue du Mois*.

Keywords. Borel, probability, *Revue du Mois*, Volterra.

1. Introduction[1]

When Emile Borel met Vito Volterra, at the International Congress of Mathematicians in Zurich in 1897, he was 11 years younger than Volterra and already considered a brilliant young mathematician. Borel had risen swiftly to the post of associate professor at the university of Lille, although at this point his international reputation was still overshadowed by elder mathematicians like Poincaré and Hermite who dominated the French school at that time. Volterra, despite being older and already well regarded by his peers, had not yet reached the watershed after which he devoted an increasing amount of time to the building of the Italian scientific institutions. The subsequent friendship of the two men, which lasted until the death of Volterra in 1940, was the basis for a large series of letters, most of which have been conserved at the Academia dei Lincei in Rome and at the Académie des Sciences in Paris.

The dialogue between these two personalities was often institutional in nature (organisation of conferences, wartime cooperation). Mathematics was not always at the center of their correspondence or, more precisely, their particular interests never coincided.

Letters that testify to their mutual simultaneous research far from dominate in number, and it is often difficult to deduce any reciprocity in the issues motivating their efforts.

*Ecole Pratique des Hautes Etudes, Paris, France. E-mail: Antonin.Durand@ephe.sorbonne.fr
†LPMA, Université Pierre et Marie Curie, Paris. E-mail: laurent.mazliak@upmc.fr

CENTAURUS 2011: VOL. 53: PP. 306–332; doi:10.1111/j.1600-0498.2011.00238.x

A.Durand and L.Mazliak : Revisiting the sources in Borel's interest in probability, Centaurus, 2011

Revisiting the Sources of Borel's Interest in Probability: Continued Fractions, Social Involvement, Volterra's Prolusione

Antonin Durand* and Laurent Mazliak†

Abstract. In this paper, we revisit the origins of Emile Borel's developing interest in probability around 1905. This resulted from new findings in his research on continued fraction, but it also cannot be separated from the discovery of new applications for the mathematics of randomness (such as biology or economics) and of their importance as a life-changing tool for the citizen. In particular, we underline the role of a paper published by Vito Volterra in Borel's *Revue du Mois*.

Keywords. Borel, probability, *Revue du Mois*, Volterra.

1. Introduction[1]

When Emile Borel met Vito Volterra, at the International Congress of Mathematicians in Zurich in 1897, he was 11 years younger than Volterra and already considered a brilliant young mathematician. Borel had risen swiftly to the post of associate professor at the university of Lille, although at this point his international reputation was still overshadowed by elder mathematicians like Poincaré and Hermite who dominated the French school at that time. Volterra, despite being older and already well regarded by his peers, had not yet reached the watershed after which he devoted an increasing amount of time to the building of the Italian scientific institutions. The subsequent friendship of the two men, which lasted until the death of Volterra in 1940, was the basis for a large series of letters, most of which have been conserved at the Academia dei Lincei in Rome and at the Académie des Sciences in Paris.

The dialogue between these two personalities was often institutional in nature (organisation of conferences, wartime cooperation). Mathematics was not always at the center of their correspondence or, more precisely, their particular interests never coincided.

Letters that testify to their mutual simultaneous research far from dominate in number, and it is often difficult to deduce any reciprocity in the issues motivating their efforts.

*Ecole Pratique des Hautes Etudes, Paris, France. E-mail: Antonin.Durand@ephe.sorbonne.fr
†LPMA, Université Pierre et Marie Curie, Paris. E-mail: laurent.mazliak@upmc.fr

Centaurus 2011: Vol. 53: pp. 306–332; doi:10.1111/j.1600-0498.2011.00238.x

A.Durand and L.Mazliak : Revisiting the sources in Borel's interest in probability, Centaurus, 2011

les probabilités apparaissent comme la seule voie d'accès envisageable au chemin de l'avenir dans un monde qui n'est plus doté des arêtes vives de la certitude mais se présente désormais comme le royaume flou des approximations.

(Cavaillès, Du collectif au pari, RMM, 1940)

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES PRINCIPES DE LA THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ,

PAR M. ÉMILE BOREL.

La théorie cinétique des gaz et ses applications et extensions diverses sont encore loin d'être acceptées sans difficulté par tous. En particulier, les applications du calcul des probabilités aux calculs statistiques concernant les molécules excitent beaucoup de défiance chez certains esprits. Bien peu sans doute en sont restés à la boutade de Joseph Bertrand, disant que ces problèmes de probabilité ressemblent au problème célèbre de l'*âge du capitaine*, qu'on propose de déterminer, connaissant la hauteur du grand mât. Mais, sans aller jusque-là, on doit reconnaître que l'énoncé même des problèmes manque souvent de précision et que les déductions par lesquelles on arrive à la solution manquent parfois de rigueur.

En faisant cette constatation, je tiens à dire qu'elle ne diminue en aucune manière mon admiration pour les créateurs de la théorie. La route était difficile et ils ont eu raison de ne point s'attarder aux premiers obstacles; le plus pressé était d'arriver à des résultats susceptibles de vérification expérimentale; ces résultats sont un encouragement à persévérer dans la voie ouverte par Maxwell.

Je voudrais m'adresser à tous ceux qui, au sujet de la théorie cinétique des gaz, partagent l'opinion de Bertrand que les problèmes de probabilité sont semblables au problème de trouver l'âge du capitaine quand on connaît la hauteur du grand mât. Si leurs scrupules sont justifiés jusqu'à un certain point parce qu'on ne peut reprocher à un mathématicien son amour de la rigueur, il ne me semble cependant pas impossible de les contenter.
C'est le but des pages qui suivent : elles ne font faire aucun progrès réel à la théorie du point de vue physique; mais elles arriveront peut être à convaincre plusieurs mathématiciens de son intérêt, et, en augmentant le nombre de chercheurs, contribueront indirectement à son développement. Si c'est le cas, elles n'auront pas été inutiles, indépendamment de l'intérêt esthétique présent dans toute construction logique.

Je voudrais m'adresser à tous ceux qui, au sujet de la théorie cinétique des gaz, partagent l'opinion de Bertrand que les problèmes de probabilité sont semblables au problème de trouver l'âge du capitaine quand on connaît la hauteur du grand mât. Si leurs scrupules sont justifiés jusqu'à un certain point parce qu'on ne peut reprocher à un mathématicien son amour de la rigueur, il ne me semble cependant pas impossible de les contenter.
C'est le but des pages qui suivent : elles ne font faire aucun progrès réel à la théorie du point de vue physique; mais elles arriveront peut être à convaincre plusieurs mathématiciens de son intérêt, et, en augmentant le nombre de chercheurs, contribueront indirectement à son développement. Si c'est le cas, elles n'auront pas été inutiles, indépendamment de l'intérêt esthétique présent dans toute construction logique.

(2) *Voir* dans Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, le Chapitre sur le calcul des probabilités. Je ne puis citer à chaque instant ces pages suggestives, dont la lecture m'a été fort utile. Sur plusieurs points, d'ailleurs, j'adopte un point de vue très différent de celui de M. Poincaré.

Problème A - Quelle est la probabilité pour qu'au 1er janvier 1907 toutes les petites planètes soient sur un même demi-cercle C_1 fixé l'avance.

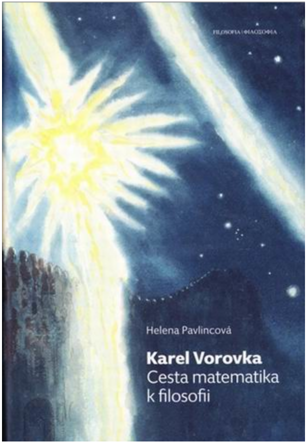
Problème B. - Quelle est la probabilité pour que les points P soient tous sur C_1 à une époque t comprise dans un intervalle donné de 2000 ans, par exemple entre le 1er janvier 907 et le 1er janvier 2907; cette époque t sera déterminée par le sort, de telle manière qu'il y ait des probabilités égales à ce que t soit compris dans deux intervalles de temps égaux quelconques.

Problème C. - Connaissant à ε près les moyens mouvements des n petites planètes et connaissant exactement leurs positions initiales, on désigne par $\overline{\omega}$ la probabilité pour qu'à une époque t choisie arbitrairement dans un intervalle a, b tous les points P correspondants soient sur C_1. Quelle est la limite vers laquelle tend $\overline{\omega}$ lorsque l'intervalle a, b augmente indéfiniment?

Je viens de lire le livre que vous avez eu l'amabilité de me faire envoyer; je n'ai pas besoin de vous dire combien les parties neuves m'ont intéressé, en particulier votre théorie du battage. J'ai essayé de la mettre à la portée de ceux qui ne sont pas familiers avec les nombres complexes, et il m'a semblé que j'obtenais ainsi une proposition un peu plus générale. Si elle est nouvelle, et si elle vous paraît intéressante, je vous demanderai de communiquer la note ci-jointe.

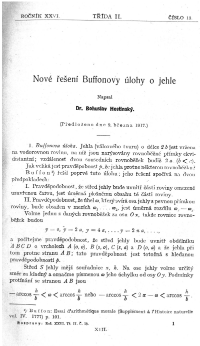
(Borel à Poincaré, 29 décembre 1911)

Karel Vorovka
(1879-1929)



Bohuslav Hostinský
(1884-1951)

Bohuslav Hostinský
(1884-1951)



ROČNÍK XXVI. TŘÍDA II. ČÍSLO 13.

Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle

Napsal

Dr. Bohuslav Hostinský.

(Předloženo dne 9. března 1917.)

1. *Buffonova úloha.* Jehla (válcového tvaru) o délce $2b$ jest vržena na vodorovnou rovinu, na níž jsou narýsovány rovnoběžné přímky ekvidistantní; vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek budiž $2a$ ($b < a$).

Jak veliká jest pravděpobnost p, že jehla protne některou rovnoběžku?

Buffon[1]) řešil poprvé tuto úlohu; jeho řešení spočívá na dvou předpokladech:

I. Pravděpodobnost, že střed jehly bude uvnitř části roviny omezené uzavřenou čarou, jest úměrná plošnému obsahu té části roviny.

II. Pravděpodobnost, že úhel ω, který svírá osa jehly s pevnou přímkou roviny, bude obsažen v mezích $\omega_1 \ldots \omega_2$, jest úměrná rozdílu $\omega_2 - \omega_1$.

Volme jednu z daných rovnoběžek za osu Ox, takže rovnice rovnoběžek budou

$$y = o,\ y = 2a,\ y = 4a, \ldots y = 2na, \ldots,$$

a počítejme pravděpodobnost, že střed jehly bude uvnitř obdélníku $ABCD$ o vrcholech $A(o, o)$, $B(s, o)$, $C(s, a)$ a $D(o, a)$ a že jehla při tom protne stranu AB; tato pravděpobnost jest totožná s hledanou pravděpodobností p.

Střed S jehly mějž souřadnice x, h. Na ose jehly volme určitý směr za kladný a označme písmenou ω jeho úchylku od osy Oy. Podmínky protínání se stranou AB jsou

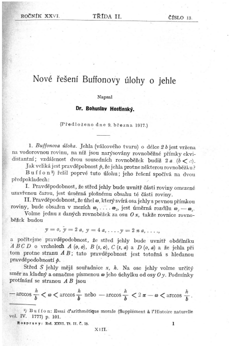
$$-\arccos\frac{h}{b} < \omega < \arccos\frac{h}{b} \text{ nebo } -\arccos\frac{h}{b} < 2\pi - \omega < \arccos\frac{h}{b}.$$

[1]) Buffon: Essai d'arithmétique morale (Supplément à l'Histoire naturelle vol. IV. 1777) p. 101.

Rozpravy: Roč. XXVI. Tř. II. Č. 13. 1

XIII.

Bohuslav Hostinský
(1884-1951)



ROČNÍK XXVI. TŘÍDA II. ČÍSLO 13.

Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle

Napsal

Dr. Bohuslav Hostinský.

(Předloženo dne 9. března 1917.)

1. *Buffonova úloha.* Jehla (válcového tvaru) o délce $2b$ jest vržena na vodorovnou rovinu, na níž jsou narýsovány rovnoběžné přímky ekvidistantní; vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek budiž $2a$ $(b < a)$.

Jak veliká jest pravděpobnost p, že jehla protne některou rovnoběžku?

Buffon[1]) řešil poprvé tuto úlohu; jeho řešení spočívá na dvou předpokladech:

I. Pravděpodobnost, že střed jehly bude uvnitř části roviny omezené uzavřenou čarou, jest úměrná plošnému obsahu té části roviny.

II. Pravděpodobnost, že úhel ω, který svírá osa jehly s pevnou přímkou roviny, bude obsažen v mezích $\omega_1 \ldots \omega_2$, jest úměrná rozdílu $\omega_2 - \omega_1$.

Volme jednu z daných rovnoběžek za osu Ox, takže rovnice rovnoběžek budou

$$y = o,\ y = 2a,\ y = 4a, \ldots y = 2na, \ldots,$$

a počítejme pravděpodobnost, že střed jehly bude uvnitř obdélníku $ABCD$ o vrcholech $A(o, o)$, $B(s, o)$, $C(s, a)$ a $D(o, a)$ a že jehla při tom protne stranu AB; tato pravděpobnost jest totožná s hledanou pravděpodobností p.

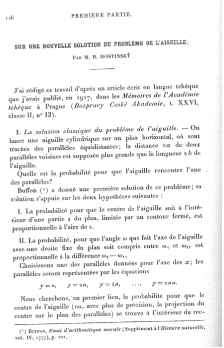
Střed S jehly mějž souřadnice x, h. Na ose jehly volme určitý směr za kladný a označme písmenou ω jeho úchylku od osy Oy. Podmínky protínání se stranou AB jsou

$$-\arccos\frac{h}{b} < \omega < \arccos\frac{h}{b} \text{ nebo } -\arccos\frac{h}{b} < 2\pi - \omega < \arccos\frac{h}{b}.$$

[1]) Buffon: Essai d'arithmétique morale (Supplément à l'Histoire naturelle vol. IV. 1777) p. 101.

Rozpravy: Roč. XXVI. Tř. II. Č. 13. 1

XIII.



126 PREMIÈRE PARTIE.

SUR UNE NOUVELLE SOLUTION DU PROBLÈME DE L'AIGUILLE;

PAR M. B. HOSTINSKÝ.

J'ai rédigé ce travail d'après un article écrit en langue tchèque que j'avais publié, en 1917, dans les *Mémoires de l'Académie tchèque* à Prague (*Rozpravy Ceské Akademie*, t. XXVI, classe II, n° 13).

1. *La solution classique du problème de l'aiguille.* — On lance une aiguille cylindrique sur un plan horizontal, où sont tracées des parallèles équidistantes; la distance $2a$ de deux parallèles voisines est supposée plus grande que la longueur $2b$ de l'aiguille.

Quelle est la probabilité pour que l'aiguille rencontre l'une des parallèles?

Buffon (1) a donné une première solution de ce problème; sa solution s'appuie sur les deux hypothèses suivantes :

I. La probabilité pour que le centre de l'aiguille soit à l'intérieur d'une partie ε du plan, limitée par un contour fermé, est proportionnelle à l'aire de ε.

II. La probabilité, pour que l'angle ω que fait l'axe de l'aiguille avec une droite fixe du plan soit compris entre ω_1 et ω_2, est proportionnelle à la différence $\omega_2 - \omega_1$.

Choisissons une des parallèles données pour l'axe des x; les parallèles seront représentées par les équations

$$y = 0, \quad y = 2a, \quad y = 4a, \quad \ldots, \quad y = 2na.$$

Nous cherchons, en premier lieu, la probabilité pour que le centre de l'aiguille (ou, avec plus de précision, la projection du centre sur le plan des parallèles) se trouve à l'intérieur du rec-

(1) BUFFON, *Essai d'arithmétique morale* (Supplément à l'*Histoire naturelle*, vol. IV, 1777), p. 101.

COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 4 JUILLET 1927.

PRÉSIDENCE DE M. CHARLES BARROIS.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

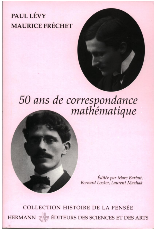
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur le battage des cartes.*
Note de M. **Hadamard.**

La question du battage des cartes, considéré au point de vue des probabilités, est apparentée à celle du postulat ergodique, fondamentale pour la Physique mathématique moderne; et c'est à ce titre que Poincaré y insistait déjà dans ses *Leçons sur le Calcul des probabilités* (1). D'un autre côté, la méthode suivie à cet égard par Poincaré repose sur un emploi assez savant et assez compliqué des nombres complexes généralisés. Il y a intérêt à raisonner, au contraire, sous la forme la plus directe et la plus intuitive possible, permettant de bien mettre en évidence l'influence des divers éléments de la question. La démonstration qui va suivre me paraît satisfaire à ce desideratum.

On part, avec Poincaré, d'un certain nombre d'opérations élémentaires

(1) *Leçons* rédigées par Quiquet, 2e édition, 1912, Chap. XVI.



J'étais resté sur l'impression que je n'avais fait que répéter Poincaré, avec quelques modifications de détails, jusqu'à il y a environ 6 mois. A ce moment Hadamard m'a dit : " Je viens seulement de découvrir ce que vous dites du battage des cartes ; vous dites que vous citez Poincaré, ce qui fait que j'ai passé la nuit sur ce paragraphe ; or Poincaré n'a rien fait de si simple"[82]

(*Paul Lévy à Maurice Fréchet, 9 novembre 1928*)

Sir **Ernest Rutherford**, élu Associé étranger, adresse des remerciments à l'Académie.

M. le **Directeur de l'École nationale vétérinaire de Toulouse** adresse un rapport relatif à l'emploi qui a été fait de la subvention accordée en 1926 sur la *Fondation Loutreuil*.

M. le **Général commandant l'École Polytechnique** adresse des remerciments pour la subvention accordée sur la *Fondation Loutreuil*.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Memento du Chimiste* (II. — *Partie industrielle*), rédigé sous la direction de Marcel Boll et Paul Baud. (Présenté par M. Ch. Moureu.)

2° *L'Urée* (*Recherches de chimie analytique, biologique et agricole*). *Les fonctions dinaphtopyranol; xanthydrol et sel de pyryle* (*Chimie organique*), par Richard Fosse. (Présenté par M. A. Béhal.)

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur les probabilités relatives aux transformations répétées*. Note de M. **B. Hostinsky**, présentée par M. J. Hadamard.

1. Le problème du battage des cartes proposé et résolu par Henri Poincaré (voir son *Calcul des Probabilités*, 2e édition, p. 301) a été récemment repris par M. Hadamard (voir *Comptes rendus*, 185, p. 5) qui a ramené la démonstration du théorème de Poincaré à un calcul de valeurs moyennes successives. Je me propose de montrer que l'analyse de M. Hadamard peut être appliquée à l'étude de problèmes plus généraux.

2. Soit x une quantité variable qui ne peut prendre que les valeurs x_1, x_2, ..., x_r. Supposons que x subisse successivement une suite de transformations dues au hasard. D'abord, x est supposée égale à x_2. Une première transformation T_1 la change en x_3. Une seconde transformation T_2 change x_3 en x_7 et ainsi de suite. Désignons par p_{ik} la probabilité pour que, x étant égale à x_i avant une transformation, elle soit égale à x_k après cette transformation. Nous supposons que p_{ik} ne dépend que des indices i et k


BOLOGNA
E
MENS AGITAT
3-10 SETTEMBRE
MCMXXVIII (VI)
CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI
SOTTO L'ALTO PATRONATO DI S. M. IL RE D'ITALIA
PRESIDENTE D'ONORE S. E. BENITO MUSSOLINI CAPO DEL GOVERNO
TESSERA DI AMMISSIONE 0031
Rilasciata al Sig. Prof. Bohusl. Hostinský
della "Masarykova Universita" – Brno (Cecoslovacchia).
Firma del Congressista
Per il Comitato


BOLOGNA
E
3-10 SETTEMBRE
MCMXXVIII (VI)
MENS AGITAT
CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI
SOTTO L'ALTO PATRONATO DI S. M. IL RE D'ITALIA
PRESIDENTE D'ONORE S. E. BENITO MUSSOLINI CAPO DEL GOVERNO
TESSERA DI AMMISSIONE 0031
Rilasciata al Sig. Prof. Bohusl. Hostinský
della "Masarykova Universita" – Brno (Cecoslovacchia)
Firma del Congressista
Per il Comitato

Paris, 1930

c'est fini!

Merci de votre attention !