

## Symétries Galoisiennes et Renormalisation

Alain Connes  
Collège de France  
3, rue Ulm  
75005 Paris

et

I.H.E.S.  
35, route de Chartres  
91440 Bures-sur-Yvette

### 1 Introduction

La renormalisation est sans doute l'un des procédés les plus élaborés pour obtenir des quantités numériques significatives à partir d'expressions mathématiques a-priori dépourvues de sens. À ce titre elle est fascinante autant pour le physicien que pour le mathématicien. La profondeur de ses origines en théorie des champs et la précision avec laquelle elle est corroborée par l'expérience en font l'un des joyaux de la physique théorique. Pour le mathématicien épris de sens, mais non corseté par la rigueur, les explications données jusqu'à présent butaient toujours sur le sens conceptuel de la partie proprement calculatoire, celle qui est utilisée par exemple en électrodynamique quantique et ne tombe pas sous la coupe des "théories asymptotiquement libres" auxquelles la théorie constructive peut prétendre avoir donné un statut mathématique satisfaisant. Cet état de fait a changé récemment et cet exposé se propose de donner la signification conceptuelle des calculs effectués par les physiciens dans la théorie de la renormalisation grâce à mon travail sur la renormalisation en collaboration avec Dirk Kreimer et la relation que nous avons établie entre renormalisation et problème de Riemann-Hilbert.

Le résultat clef est l'identité entre le procédé récursif utilisé par les physiciens et les formules mathématiques qui résolvent un lacet à valeurs dans un groupe pronilpotent  $G$  en un produit d'un lacet holomorphe par un lacet anti-holomorphe. La signification géométrique de cette décomposition (de Riemann-Hilbert, Birkhoff ou Wiener-Hopf) provient directement de la théorie des fibrés holomorphes de groupe structural  $G$  sur la sphère de Riemann  $S^2$ . Dans la renormalisation perturbative, les points de la sphère  $S^2$  sont les dimensions complexes parmi lesquelles la dimension  $d$  de l'espace-temps est un point privilégié. Le problème étant que dans les théories physiquement intéressantes les quantités à calculer conspirent pour diverger précisément au point  $d$ . On peut organiser ces quantités comme le développement de Taylor d'un difféomorphisme  $g \in G$  et donner un sens à  $g = g(z)$  en remplaçant dans les formules la dimension  $d$  par une valeur complexe  $z \neq d$ . Le procédé de renormalisation acquiert alors la signification suivante : la valeur cherchée  $g \in G$  n'est autre que la valeur  $g_+(d)$  en  $d$  de la partie holomorphe de la décomposition de Riemann-Hilbert  $g(z) = g_-^{-1}(z)g_+(z)$  du lacet  $g(z)$ . La nature exacte du groupe  $G$  impliqué dans la renormalisation a été clarifiée par les étapes essentielles suivantes. La première est la découverte due à Dirk Kreimer de la structure d'algèbre de Hopf secrètement présente dans les formules récursives de Bogoliubov Parasiuk Hepp et Zimmermann.

La seconde qui est le point de départ de notre collaboration est la similitude entre l'algèbre de Hopf des arbres enracinés de Dirk et une algèbre de Hopf que j'avais introduite avec Henri Moscovici pour organiser les calculs très complexes de géométrie noncommutative. Ceci nous a conduit avec Dirk à définir une algèbre de Hopf directement en termes de graphes de Feynman et à lui appliquer le théorème de Milnor-Moore pour en déduire une algèbre de Lie et un groupe de Lie pronilpotent  $G$ , analogue du groupe des difféomorphismes formels.

Enfin la troisième étape cruciale est la construction d'une action du groupe  $G$  sur les constantes

de couplage de la théorie physique. Ceci permet de relever le groupe de renormalisation comme un sous-groupe à un paramètre du groupe  $G$  et de montrer directement que les développements polaires des divergences sont entièrement déterminés par leurs résidus.

Le problème de Riemann-Hilbert joue un rôle clef dans la théorie de Galois différentielle, il est donc naturel d'interpréter en termes Galoisiens l'ambiguïté que le groupe de renormalisation introduit dans les théories physiques. La dernière section contient l'esquisse d'une telle interprétation.

Nous commencerons cette section par une introduction très élémentaire à la théorie de Galois pour les équations algébriques, en passant par un beau problème de géométrie plane.

Nous montrerons ensuite le rôle que le groupe de renormalisation devrait jouer pour comprendre la composante connexe du groupe des classes d'idèles de la théorie du corps de classe comme un groupe de Galois. Cette idée s'appuie à la fois sur l'analogie entre la théorie des facteurs et la théorie de Brauer pour un corps local et sur la présence implicite en théorie des champs d'un "corps de constantes" plus élaboré que le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. En fait les calculs des physiciens regorgent d'exemples de "constantes" telles les constantes de couplage  $g$  des interactions (électromagnétiques, faibles et fortes) qui n'ont de "constantes" que le nom. Elles dépendent en réalité du niveau d'énergie  $\mu$  auquel les expériences sont réalisées et sont des fonctions  $g(\mu)$ , de sorte que les physiciens des hautes énergies étendent implicitement le "corps des constantes" avec lequel ils travaillent, passant du corps  $\mathbb{C}$  des scalaires à un corps de fonctions  $g(\mu)$ . Le groupe d'automorphismes de ce corps engendré par  $\mu\partial/\partial\mu$  est le groupe d'ambiguïté de la théorie physique.

## 2 Renormalisation, position du problème

La motivation physique de la renormalisation est très claire et remonte aux travaux de Green au dix-neuvième siècle sur l'hydrodynamique. Pour prendre un exemple simple \* si l'on calcule l'accélération initiale d'une balle de ping-pong plongée à quelques mètres sous l'eau, l'on obtient en appliquant la loi de Newton  $F = ma$  et la poussée d'Archimède  $F = (M - m)g$ , où  $m$  est la masse inerte, et  $M$  la masse d'eau occupée, une accélération initiale de l'ordre de  $11g$ ! † En réalité, si l'on réalise l'expérience, l'accélération est de l'ordre de  $2g$ . En fait la présence du fluide autour de la balle oblige à corriger la valeur  $m$  de la masse inerte dans la loi de Newton et à la remplacer par une "masse effective" qui en l'occurrence vaut  $m + \frac{1}{2}M$ . Dans cet exemple, l'on peut bien sûr déterminer la masse  $m$  en pesant la balle de ping-pong hors de l'eau, mais il n'en va pas de même pour un électron dans le champ électromagnétique, dont il est impossible de l'extraire. De plus le calcul montre que, pour une particule ponctuelle comme le demande la relativité, la correction qui valait  $\frac{1}{2}M$  ci-dessus est infinie.

Vers 1947 les physiciens ont réussi à utiliser la distinction entre les deux masses qui apparaissent ci-dessus et plus généralement le concept de quantité physique "effective" pour éliminer les quantités infinies qui apparaissent en théorie des champs quantiques (voir [16] pour un aperçu historique). Une théorie des champs en  $d$  dimensions est donnée par une fonctionnelle d'action classique

$$S(A) = \int \mathcal{L}(A) d^d x \quad (1)$$

où  $A$  désigne un champ classique et le Lagrangien est de la forme,

$$\mathcal{L}(A) = (\partial A)^2/2 - \frac{m^2}{2} A^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}(A) \quad (2)$$

où  $\mathcal{L}_{\text{int}}(A)$  est un polynôme en  $A$ .

On peut décrire la théorie par les fonctions de Green,

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_N) | 0 \rangle \quad (3)$$

où le symbole  $T$  signifie que les champs quantiques  $\phi(x_j)$ 's sont écrits à temps croissant de droite à gauche.

---

\* voir le cours de théorie des champs de Sidney Coleman

† La balle pèse  $m = 2,7$  grammes et a un diamètre de 4 cm de sorte que  $M = 33,5$  grammes

L'amplitude de probabilité d'une configuration classique  $A$  est donnée par,

$$e^{i \frac{S(A)}{\hbar}} \quad (4)$$

et si l'on pouvait ignorer les problèmes de renormalisation, l'on pourrait calculer les fonctions de Green grâce à la formule

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{N} \int e^{i \frac{S(A)}{\hbar}} A(x_1) \dots A(x_N) [dA] \quad (5)$$

où  $\mathcal{N}$  est un facteur de normalisation requis par,

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (6)$$

L'on pourrait alors calculer l'intégrale fonctionnelle (5) en théorie des perturbations, en traitant le terme  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  de (2) comme une perturbation, le Lagrangien libre étant,

$$\mathcal{L}_0(A) = (\partial A)^2/2 - \frac{m^2}{2} A^2, \quad (7)$$

de sorte que,

$$S(A) = S_0(A) + S_{\text{int}}(A) \quad (8)$$

où l'action libre  $S_0$  définit une mesure Gaussienne  $\exp(i S_0(A)) [dA] = d\mu$ .

On obtient alors le développement perturbatif des fonctions de Green sous la forme,

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} i^n/n! \int A(x_1) \dots A(x_N) (S_{\text{int}}(A))^n d\mu \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} i^n/n! \int S_{\text{int}}(A)^n d\mu \right)^{-1}. \quad (9)$$

Les termes de ce développement s'obtiennent en intégrant par partie sous la Gaussienne. Cela engendre un grand nombre de termes  $U(\Gamma)$ , où les paramètres  $\Gamma$  sont les graphes de Feynman  $\Gamma$ , i.e. des graphes dont les sommets correspondent aux termes du Lagrangien de la théorie. En règle générale les valeurs des termes  $U(\Gamma)$  sont données par des intégrales divergentes. Les divergences les plus importantes sont causées par la présence dans le domaine d'intégration de moments de taille arbitrairement grande. La technique de renormalisation consiste d'abord à "régulariser" ces intégrales divergentes par exemple en introduisant un paramètre de "cutoff"  $\Lambda$  et en se restreignant à la portion correspondante du domaine d'intégration. Les intégrales sont alors finies, mais continuent bien entendu à diverger quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ . On établit ensuite une dépendance entre les termes du Lagrangien et  $\Lambda$  pour que les choses s'arrangent et que les résultats ayant un sens physique deviennent finis! Dans le cas particulier des théories asymptotiquement libres, la forme explicite de la dépendance entre les constantes nues et le paramètre de régularisation  $\Lambda$  a permis dans des cas très importants ([19],[17]) de mener à bien le programme de la théorie constructive des champs ([20]).

Décrivons maintenant en détail la technique de renormalisation perturbative. Pour faire les choses systématiquement, on rajoute un "contreterme"  $C(\Gamma)$  au Lagrangien de départ  $\mathcal{L}$ , chaque fois que l'on rencontre un diagramme divergent  $\Gamma$ , dans le but d'annuler la divergence correspondante. Pour les théories "renormalisables", les contre-terms dont on a besoin sont tous déjà des termes du Lagrangien  $\mathcal{L}$  et ces contorsions peuvent s'interpréter à partir de l'inobservabilité des quantités numériques qui apparaissent dans  $\mathcal{L}$ , par opposition aux quantités physiques qui, elles, doivent rester finies.

La principale complication dans cette procédure vient de l'existence de nombreux graphes  $\Gamma$  pour lesquels les divergences de  $U(\Gamma)$  ne sont pas locales. La raison étant que ces graphes possèdent déjà des sous-graphes dont les divergences doivent être prises en compte avant d'aller plus loin.

La méthode combinatoire précise, due à Bogoliubov-Parasiuk-Hepp et Zimmermann ([2]) consiste d'abord à "préparer" le graphe  $\Gamma$  en remplaçant  $U(\Gamma)$  par l'expression formelle,

$$\overline{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma) \quad (10)$$

où  $\gamma$  varie parmi tous les sous-graphes divergents. On montre alors que le calcul des divergences du graphe "préparé" ne donne que des expressions locales, qui pour les théories renormalisables se trouvent déjà dans le Lagrangien  $\mathcal{L}$ .

### 3 L'algèbre de Hopf des graphes de Feynman

Dirk Kreimer a eu l'idée remarquable en 97 ([23]) d'utiliser la formule (10) pour définir le coproduit d'une algèbre de Hopf.

En tant qu'algèbre  $\mathcal{H}$  est l'algèbre commutative libre engendrée par les graphes "une particule irréductibles" (1PI)<sup>‡</sup>

Elle admet ainsi une base indexée par les graphes  $\Gamma$  unions disjointes de graphes 1PI.

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j. \quad (11)$$

Le produit dans  $\mathcal{H}$  est donné par l'union disjointe,

$$\Gamma \cdot \Gamma' = \Gamma \cup \Gamma'. \quad (12)$$

Pour définir le coproduit,

$$\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \quad (13)$$

il suffit de le donner sur les graphes 1PI, on a

$$\Delta\Gamma = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subset \Gamma} \gamma_{(i)} \otimes \Gamma/\gamma_{(i)} \quad (14)$$

Ici  $\gamma$  est un sous-ensemble (non vide et de complémentaire non-vide)  $\gamma \subset \Gamma^{(1)}$  de l'ensemble  $\Gamma^{(1)}$  des faces internes de  $\Gamma$  dont les composantes connexes  $\gamma'$  vérifient des conditions d'admissibilité détaillées dans la référence [12].

Le coproduit  $\Delta$  défini par (14) sur les graphes 1PI se prolonge de manière unique en un homomorphisme de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ . On a alors ([23],[12])

**Théorème** *Le couple  $(\mathcal{H}, \Delta)$  est une algèbre de Hopf.*

### 4 L'algèbre de Lie des graphes, le groupe $G$ et sa structure.

J'avais à la même époque, dans les calculs de Géométrie Noncommutative de l'indice transverse pour les feuilletages, montré, avec Henri Moscovici, ([15]) que la complexité extrême de ces calculs conduisait à introduire une algèbre de Hopf  $\mathcal{H}_{cm}$ , qui n'est ni commutative ni cocommutative mais est intimement reliée au groupe des difféomorphismes, dont l'algèbre de Lie apparaît en appliquant le théorème de Milnor-Moore à une sous-algèbre commutative.

Après l'exposé de Dirk à l'IHES en février 98, nous avons tous les deux été intrigués par la similarité apparente entre ces deux algèbres de Hopf et notre collaboration a commencé par l'application du théorème de Milnor-Moore à l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}$ . Le théorème de Milnor-Moore montre qu'elle est duale de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie graduée  $\underline{G}$  dont une base est donnée par les

<sup>‡</sup> Un graphe de Feynman  $\Gamma$  est "une particule irréductible" (1PI) si il est connexe et le reste après avoir enlevé n'importe laquelle de ses faces

graphes 1-particule irréductibles. Le crochet de Lie de deux graphes est obtenu par insertion d'un graphe dans l'autre. Le groupe de Lie correspondant  $G$  est le groupe des caractères de  $\mathcal{H}$ . Nous avons ensuite analysé le groupe  $G$  et montré qu'il est produit semi-direct d'un groupe abélien par un groupe très relié au groupe des difféomorphismes des constantes de couplage sans dimension de la théorie des champs (voir section VII).

L'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}$  admet plusieurs graduations naturelles. Il suffit de donner le degré des graphes 1PI puis de poser en général,

$$\deg(\Gamma_1 \dots \Gamma_e) = \sum \deg(\Gamma_j), \quad \deg(1) = 0 \quad (15)$$

On doit vérifier que,

$$\deg(\gamma) + \deg(\Gamma/\gamma) = \deg(\Gamma) \quad (16)$$

pour tout sous-graphe admissible  $\gamma$ .

Les deux graduations les plus naturelles sont

$$I(\Gamma) = \text{nombre de faces internes } \Gamma \quad (17)$$

et

$$v(\Gamma) = V(\Gamma) - 1 = \text{nombre de sommets } \Gamma - 1. \quad (18)$$

On a aussi la combinaison importante

$$L = I - v = I - V + 1 \quad (19)$$

qui est le nombre de boucles du graphe.

Soit  $G$  un graphe 1PI avec  $n$  faces externes indexées par  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on spécifie sa structure externe en donnant une distribution  $\sigma$  définie sur un espace convenable de fonctions test  $\mathcal{S}$  sur

$$\left\{ (p_i)_{i=1, \dots, n} ; \sum p_i = 0 \right\} = E_G. \quad (20)$$

Ainsi  $\sigma$  est une forme linéaire continue,

$$\sigma : \mathcal{S}(E) \rightarrow \mathbb{C}. \quad (21)$$

A un graphe  $\Gamma$  de structure externe  $\sigma$  correspond un élément de  $\mathcal{H}$  et on a

$$\delta_{(\Gamma, \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2)} = \lambda_1 \delta_{(\Gamma, \sigma_1)} + \lambda_2 \delta_{(\Gamma, \sigma_2)}. \quad (22)$$

Nous appliquons alors le théorème de Milnor-Moore à l'algèbre de Hopf bigraduée  $\mathcal{H}$ .

Ce théorème donne une structure d'algèbre de lie sur,

$$\bigoplus_{\Gamma} \mathcal{S}(E_{\Gamma}) = L \quad (23)$$

où pour chaque graphe 1PI  $\Gamma$ , on définit  $\mathcal{S}(E_{\Gamma})$  comme dans (20). Soit  $X \in L$  et soit  $Z_X$  la forme linéaire sur  $\mathcal{H}$  donnée, sur les monomes  $\Gamma$ , par

$$\langle \Gamma, Z_X \rangle = 0 \quad (24)$$

sauf si  $\Gamma$  est connexe et 1PI, et dans ce cas par,

$$\langle \Gamma, Z_X \rangle = \langle \sigma_{\Gamma}, X_{\Gamma} \rangle \quad (25)$$

où  $\sigma_{\Gamma}$  est la distribution qui donne la structure externe de  $\Gamma$  et  $X_{\Gamma}$  la composante correspondante de  $X$ . Par construction  $Z_X$  est un caractère infinitésimal de  $\mathcal{H}$  ainsi que les commutateurs,

$$[Z_{X_1}, Z_{X_2}] = Z_{X_1} Z_{X_2} - Z_{X_2} Z_{X_1}. \quad (26)$$

Le produit étant obtenu par transposition du coproduit de  $\mathcal{H}$ , i.e. par

$$\langle Z_1 Z_2, \Gamma \rangle = \langle Z_1 \otimes Z_2, \Delta \Gamma \rangle. \quad (27)$$

Soient  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$  des graphes 1PI et  $\varphi_j \in \mathcal{S}(E_{\Gamma_j})$  les fonctions test correspondantes.

Pour  $i \in \{0, 1\}$ , soit  $n_i(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma)$  le nombre de sous-graphes de  $\Gamma$  isomorphes à  $\Gamma_1$  et tels que

$$\Gamma/\Gamma_1(i) \simeq \Gamma_2. \quad (28)$$

Soit  $(\Gamma, \varphi)$  l'élément de  $L$  associé à  $\varphi \in \mathcal{S}(E_\Gamma)$ , le crochet de Lie de  $(\Gamma_1, \varphi_1)$  et  $(\Gamma_2, \varphi_2)$  est donné par,

$$\sum_{\Gamma, i} \sigma_i(\varphi_1) n_i(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma) (\Gamma, \varphi_2) - \sigma_i(\varphi_2) n_i(\Gamma_2, \Gamma_1; \Gamma) (\Gamma, \varphi_1). \quad (29)$$

**Théorème** ([12]) *L'algèbre de Lie  $L$  est produit semi-direct d'une algèbre de Lie Abélienne  $L_0$  par  $L_c$  où  $L_c$  admet une base canonique indéxée par les graphes  $\Gamma^{(i)}$  avec*

$$[\Gamma, \Gamma'] = \sum_v \Gamma \circ_v \Gamma' - \sum_{v'} \Gamma' \circ_{v'} \Gamma$$

où  $\Gamma \circ_v \Gamma'$  est obtenu en greffant  $\Gamma'$  sur  $\Gamma$  en  $v$ .

## 5 Renormalisation et problème de Riemann-Hilbert

Le problème de Riemann-Hilbert vient du 21<sup>ème</sup> problème de Hilbert qu'il formulait ainsi ;

“Montrer qu'il existe toujours une équation différentielle Fuchsienne linéaire de singularités et monodromies données.”

Sous cette forme il admet une réponse positive due à Plemelj et Birkhoff (cf. [1] pour un exposé détaillé). Quand on le reformule pour les systèmes linéaires de la forme,

$$y'(z) = A(z) y(z), \quad A(z) = \sum_{\alpha \in S} \frac{A_\alpha}{z - \alpha}, \quad (30)$$

où  $S$  est l'ensemble fini donné des singularités,  $\infty \notin S$ , et les  $A_\alpha$  sont des matrices complexes telles que

$$\sum A_\alpha = 0 \quad (31)$$

pour éviter les singularités à  $\infty$ , la réponse n'est pas toujours positive [3], mais la solution existe quand les matrices de monodromie  $M_\alpha$  sont suffisamment proches de 1. On peut alors l'écrire explicitement sous la forme d'une série de polylogarithmes [24].

Une autre formulation du problème de Riemann-Hilbert, intimement liée à la classification des fibrés vectoriels holomorphes sur la sphère de Riemann  $P_1(\mathbb{C})$ , est en termes de la décomposition de Birkhoff

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_+(z) \quad z \in C \quad (32)$$

où  $C \subset P_1(\mathbb{C})$  désigne une courbe simple,  $C_-$  la composante connexe du complément de  $C$  contenant  $\infty \notin C$  et  $C_+$  la composante bornée.

Les trois lacets  $\gamma$  et  $\gamma_\pm$  sont à valeurs dans  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\gamma(z) \in G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (33)$$

et  $\gamma_\pm$  sont les valeurs au bord d'applications holomorphes

$$\gamma_\pm : C_\pm \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}). \quad (34)$$

La condition  $\gamma_-(\infty) = 1$  assure l'unicité de la décomposition (32) si elle existe.

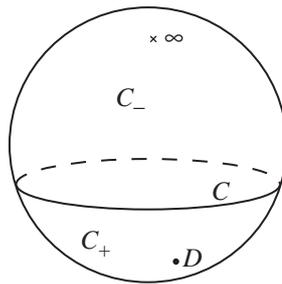


Figure 1

L'existence de la décomposition de Birkhoff (32) est équivalente à l'annulation,

$$c_1(L_j) = 0 \tag{35}$$

des nombres de Chern  $n_j = c_1(L_j)$  des fibrés en droites holomorphes de la décomposition de Birkhoff-Grothendieck,

$$E = \oplus L_j \tag{36}$$

où  $E$  est le fibré vectoriel holomorphe sur  $P_1(\mathbb{C})$  associé à  $\gamma$ , i.e. d'espace total :

$$(C_+ \times \mathbb{C}^n) \cup_{\gamma} (C_- \times \mathbb{C}^n). \tag{37}$$

La discussion ci-dessus pour  $G = GL_n(\mathbb{C})$  s'étend aux groupes de Lie complexes arbitraires.

Quand  $G$  est un groupe de Lie complexe nilpotent et simplement connexe l'existence (et l'unicité) de la décomposition de Birkhoff (32) est vraie pour tout  $\gamma$ . Quand le lacet  $\gamma : C \rightarrow G$  se prolonge en un lacet holomorphe  $: C_+ \rightarrow G$ , la décomposition de Birkhoff est donnée par  $\gamma_+ = \gamma, \gamma_- = 1$ . En général, pour  $z \in C_+$  l'évaluation,

$$\gamma \rightarrow \gamma_+(z) \in G \tag{38}$$

donne un principe naturel pour extraire une valeur finie à partir de l'expression singulière  $\gamma(z)$ . Cette extraction de partie finie est une division par la partie polaire pour un lacet méromorphe  $\gamma$  en prenant pour  $C$  un cercle infinitésimal centré en  $z_0$ .

Soit  $G$  un groupe de Lie complexe pro-nilpotent,  $\mathcal{H}$  son algèbre de Hopf de coordonnées (graduée). Rappelons la traduction entre langages algébriques et géométriques, en désignant par  $\mathcal{R}$  l'anneau des fonctions méromorphes,  $\mathcal{R}_-$  le sous anneau des polynomes en  $(z - z_0)^{-1}$  et  $\mathcal{R}_+$  celui des fonctions régulières en  $z_0$ ,

<u>Homomorphismes de <math>\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}</math></u>	<u>Lacets de <math>C</math> à valeurs dans <math>G</math></u>	
$\phi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}_-$	$\gamma$ se prolonge en une application holomorphe de $\mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow G$ avec $\gamma(\infty) = 1$ .	
$\phi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}_+$	$\gamma$ se prolonge en une application holomorphe définie en $z = z_0$ .	(5.1)
$\phi = \phi_1 \star \phi_2$	$\gamma(z) = \gamma_1(z)\gamma_2(z), \forall z \in \mathbb{C}$ .	
$\phi \circ S$	$z \rightarrow \gamma(z)^{-1}$ .	

Pour  $X \in \mathcal{H}$  notons le coproduit sous la forme

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X + \sum X' \otimes X''$$

La décomposition de Birkhoff d'un lacet s'obtient de manière récursive grâce au théorème suivant,

**Théorème** ([12]) *Soit  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$ , un homomorphisme d'algèbres. La décomposition de Birkhoff du lacet correspondant est donnée de manière récursive par les égalités,*

$$\begin{aligned}\phi_-(X) &= -T \left( \phi(X) + \sum \phi_-(X') \phi(X'') \right) \\ \phi_+(X) &= \phi(X) + \phi_-(X) + \sum \phi_-(X') \phi(X'').\end{aligned}$$

Ici  $T$  désigne la projection sur  $\mathcal{R}_-$  parallèlement à  $\mathcal{R}_+$ .

La clef de notre travail avec Dirk Kreimer réside dans l'identité entre ces formules et celles qui gouvernent la combinatoire des calculs de graphes. Nous avons déjà vu la formule qui définit la préparation d'un graphe,

$$\overline{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma) \quad (39)$$

Celle qui donne le contreterme  $C(\Gamma)$  est alors,

$$C(\Gamma) = -T(\overline{R}(\Gamma)) = -T \left( U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma) \right) \quad (40)$$

et celle qui donne la valeur renormalisée du graphe est,

$$R(\Gamma) = \overline{R}(\Gamma) + C(\Gamma) = U(\Gamma) + C(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma) \quad (41)$$

Il est alors clair en posant  $\phi = U$ ,  $\phi_- = C$ ,  $\phi_+ = R$  que ces équations sont identiques à celles du théorème donnant la construction récursive de la décomposition de Birkhoff.

Décrivons plus en détails ce résultat. Etant donnée une théorie renormalisable en dimension  $D$  la théorie nonrenormalisée donne en utilisant la régularisation dimensionnelle un lacet  $\gamma$  d'éléments du groupe  $G$  associé à la théorie dans la section IV. Le paramètre  $z$  du lacet  $\gamma(z)$  est une variable complexe et  $\gamma(z)$  est méromorphe dans un voisinage de  $D$ . Notre résultat principal est que la théorie renormalisée est donnée par l'évaluation à  $z = D$  de la partie nonsingulière  $\gamma_+$  de la décomposition de Birkhoff ,

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_+(z) \quad (42)$$

de  $\gamma$ .

Les règles de Feynman et la régularisation dimensionnelle associent un nombre,

$$U_\Gamma(p_1, \dots, p_N) = \int d^d k_1 \dots d^d k_L I_\Gamma(p_1, \dots, p_N, k_1, \dots, k_L) \quad (43)$$

à chaque graphe  $\Gamma$ . Nous les utilisons en métrique Euclidienne pour éviter les facteurs imaginaires. Pour respecter les dimensions physiques des quantités impliquées quand on écrit ces règles en dimension  $d$ , il faut introduire une unité de masse  $\mu$  et remplacer partout la constante de couplage par  $\mu^{3-d/2} g$ . On normalise ainsi les calculs par,

$$U(\Gamma) = g^{(2-N)} \mu^{-B} \langle \sigma, U_\Gamma \rangle \quad (44)$$

où  $B = B(d)$  est la dimension de  $\langle \sigma, U_\Gamma \rangle$ .

On étend la définition (44) aux réunions disjointes de graphes 1PI  $\Gamma_j$  par,

$$U(\Gamma = \cup \Gamma_j) = \prod U(\Gamma_j). \quad (45)$$

Le résultat principal est alors le suivant :

**Théorème** ([12]) a) *Il existe une unique application méromorphe  $\gamma(z) \in G$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq D$  dont les  $\Gamma$ -coordonnées sont données par  $U(\Gamma)_{d=z}$ .*

b) *La valeur renormalisée d'une observable physique  $\mathcal{O}$  est obtenue en remplaçant  $\gamma(D)$  dans le développement perturbatif de  $\mathcal{O}$  par  $\gamma_+(D)$  où*

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_+(z)$$

*est la décomposition de Birkhoff du lacet  $\gamma(z)$  relativement à un cercle infinitésimal autour de  $D$ .*

## 6 Le groupe de renormalisation

Montrons comment le groupe de renormalisation apparaît très simplement de notre point de vue. Comme nous l'avons vu ci-dessus, la régularisation dimensionnelle implique le choix arbitraire d'une unité de masse  $\mu$  et l'on constate d'abord que la partie singulière de la décomposition de Riemann-Hilbert de  $\gamma$  est en fait indépendante de ce choix. Il en résulte une contrainte très forte sur cette partie singulière et le groupe de renormalisation s'en déduit immédiatement. Nous en déduisons également une formule explicite pour l'action nue. On montre d'abord, en se limitant à la théorie  $\varphi_6^3$  pour simplifier les notations, que bien que le lacet  $\gamma(d)$  dépende du choix de l'unité de masse  $\mu$ ,

$$\mu \rightarrow \gamma_\mu(d), \quad (46)$$

la partie singulière  $\gamma_{\mu-}$  de sa décomposition de Birkhoff,

$$\gamma_\mu(d) = \gamma_{\mu-}(d)^{-1} \gamma_{\mu+}(d) \quad (47)$$

est en fait indépendante de  $\mu$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \gamma_{\mu-}(d) = 0. \quad (48)$$

Cet énoncé découle immédiatement de l'analyse dimensionnelle.

De plus, par construction le groupe de Lie  $G$  est muni d'un groupe à un paramètre d'automorphismes,

$$\theta_t \in \text{Aut } G, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (49)$$

associé à la graduation de l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}$  donnée par le nombre de boucles,

$$L(\Gamma) = \text{nombre de boucles } \Gamma \quad (50)$$

pour tout graphe 1PI  $\Gamma$ .

On a l'égalité

$$\gamma_{e^t \mu}(d) = \theta_{t\varepsilon}(\gamma_\mu(d)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon = D - d \quad (51)$$

Il en résulte que les lacets  $\gamma_\mu$  associés à la théorie nonrenormalisée satisfont la propriété suivante : la partie singulière de leur décomposition de Birkhoff est inchangée par l'opération,

$$\gamma(\varepsilon) \rightarrow \theta_{t\varepsilon}(\gamma(\varepsilon)), \quad (52)$$

En d'autres termes, si l'on remplace  $\gamma(\varepsilon)$  par  $\theta_{t\varepsilon}(\gamma(\varepsilon))$  l'on ne modifie pas la partie singulière de sa décomposition de Birkhoff. On a posé

$$\varepsilon = D - d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (53)$$

Nous donnons une caractérisation complète des lacets  $\gamma(\varepsilon) \in G$  vérifiant cette propriété. Cette caractérisation n'implique que la partie singulière  $\gamma_-(\varepsilon)$  qui vérifie par hypothèse,

$$\gamma_-(\varepsilon) \theta_{t\varepsilon}(\gamma_-(\varepsilon)^{-1}) \text{ est convergent pour } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (54)$$

Il est facile de voir que la limite de (54) pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  définit un sous-groupe à un paramètre,

$$F_t \in G, \quad t \in \mathbb{R} \quad (55)$$

et que le générateur  $\beta = \left(\frac{\partial}{\partial t} F_t\right)_{t=0}$  de ce sous-groupe est relié au *résidu* de  $\gamma$

$$\operatorname{Res}_{\varepsilon=0} \gamma = - \left( \frac{\partial}{\partial u} \gamma - \left( \frac{1}{u} \right) \right)_{u=0} \quad (56)$$

par l'équation,

$$\beta = Y \operatorname{Res} \gamma, \quad (57)$$

où  $Y = \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta_t\right)_{t=0}$  est la graduation.

Ceci est immédiat mais notre résultat ([13]) donne la formule explicite (59) qui exprime  $\gamma_-(\varepsilon)$  en fonction de  $\beta$ . Introduisons le produit semi-direct de l'algèbre de Lie  $G$  (des éléments primitifs de  $\mathcal{H}^*$ ) par la graduation. On a donc un élément  $Z_0$  tel que

$$[Z_0, X] = Y(X) \quad \forall X \in \operatorname{Lie} G. \quad (58)$$

La formule pour  $\gamma_-(\varepsilon)$  est alors

$$\gamma_-(\varepsilon) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t(\frac{\beta}{\varepsilon} + Z_0)} e^{tZ_0}. \quad (59)$$

Les deux facteurs du terme de droite appartiennent au produit semi-direct du groupe  $G$  par sa graduation, mais leur rapport (59) appartient au groupe  $G$ .

Cette formule montre que toute la structure des divergences est uniquement déterminée par le résidu et donne une forme forte des relations de t'Hooft [21].

## 7 Le groupe $G$ et les difféomorphismes

Bien entendu, on pourrait facilement objecter aux développements précédents en arguant que le mystère de la renormalisation n'est pas complètement éclairci car le groupe  $G$  construit à partir des graphes de Feynman apparait également mystérieux. Cette critique est complètement levée par la merveilleuse relation, basée sur la physique entre les algèbres de Hopf  $\mathcal{H}$  des graphes de Feynman et celle,  $\mathcal{H}_{cm}$  des difféomorphismes.

Nous montrons, dans le cas de masse nulle, que la formule qui donne la constante de couplage effective,

$$g_0 = \left( g + \sum_{\text{diagramme}} g^{2\ell+1} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)} \right) \left( 1 - \sum_{\text{diagramme}} g^{2\ell} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)} \right)^{-3/2} \quad (60)$$

considérée comme une série formelle dans la variable  $g$  d'éléments de l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}$ , définit en fait un homomorphisme d'algèbres de Hopf de l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}_{cm}$  des coordonnées sur le groupe des difféomorphismes formels de  $\mathbb{C}$  tels que,

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \operatorname{id} \quad (61)$$

vers l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}$  de la théorie de masse nulle.

Il en résulte en transposant, une action formelle du groupe  $G$  sur la constante de couplage. Nous montrons en particulier que l'image par  $\rho$  de  $\beta = Y \operatorname{Res} \gamma$  est la fonction  $\beta$  de la constante de couplage  $g$ .

Nous obtenons ainsi un corollaire du théorème principal qui se formule sans faire intervenir ni le groupe  $G$  ni l'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}$ .

**Théorème** [13] *Considérons la constante de couplage effective nonrenormalisée  $g_{\text{eff}}(\varepsilon)$  comme une série formelle en  $g$  et soit  $g_{\text{eff}}(\varepsilon) = g_{\text{eff}+}(\varepsilon) (g_{\text{eff}-}(\varepsilon))^{-1}$  sa décomposition de Birkhoff (opposée) dans le groupe des difféomorphismes formels. Alors le lacet  $g_{\text{eff}-}(\varepsilon)$  est la constante de couplage nue et  $g_{\text{eff}+}(0)$  la constante de couplage renormalisée.*

Comme la décomposition de Birkhoff d'un lacet à valeurs dans le groupe des difféomorphismes (formels) est évidemment reliée à la classification des fibrés (non-vectoriels) holomorphes, ce résultat

suggère qu'un tel fibré ayant pour base un voisinage de la dimension  $d$  de l'espace temps et pour fibre les valeurs (complexifiées) des constantes de couplage devrait donner une interprétation géométrique de l'opération de renormalisation. Il faut tout de même noter que la décomposition de Birkhoff a lieu ici relativement à un cercle infinitésimal autour de  $d$  et qu'il s'agit de difféomorphismes formels.

Les résultats ci-dessus montrent qu'au niveau des développements perturbatifs le procédé de renormalisation admet une interprétation géométrique simple grâce au groupe  $G$  et à la décomposition de Riemann-Hilbert. Le problème essentiel consiste à passer du développement perturbatif à la théorie non-perturbative, ce qui revient en termes de difféomorphismes à passer du développement de Taylor à la formule globale.

## 8 Le groupe de renormalisation et la théorie de Galois aux places archimédiennes

Le problème de Riemann-Hilbert joue un rôle clef dans la théorie de Galois différentielle, il est donc naturel d'interpréter en termes Galoisiens l'ambiguïté que le groupe de renormalisation introduit dans les théories physiques. Cette section contient l'esquisse d'une telle interprétation. Nous montrerons en particulier le rôle que le groupe de renormalisation devrait jouer pour comprendre la composante connexe du groupe des classe d'idèles de la théorie du corps de classe comme un groupe de Galois.

Commençons par une introduction très élémentaire à la théorie de Galois pour les équations algébriques.

Si la technique de résolution des équations du second degré remonte à la plus haute Antiquité (Babyloniens, Egyptiens...), elle n'a pu être étendue au troisième degré que bien plus tard, et ne sera publiée par Girolamo (Jérôme) Cardano qu'en 1545 dans les chapitres 11 à 23 de son livre *Ars magna sive de regulis algebraicis*. Bien que cela n'ait pas été reconnu avant le dix-huitième siècle, la clef de la résolution par radicaux de l'équation générale du troisième degré,  $x^3 + nx^2 + px + q = 0$ , de racines  $a, b, c$ , est l'existence d'une fonction rationnelle  $\alpha(a, b, c)$  de  $a, b, c$ , qui ne prend que deux déterminations différentes sous l'action des six permutations de  $a, b, c$ .

La méthode de Cardan revient à poser  $\alpha = ((1/3)(a + bj + cj^2))^3$  où le nombre  $j$  est la première racine cubique de l'unité. La permutation circulaire transformant  $a$  en  $b$ ,  $b$  en  $c$  et  $c$  en  $a$  laisse manifestement  $\alpha$  inchangée et la seule autre détermination de la fonction  $\alpha$  sous l'action des six permutations de  $a, b, c$ , est obtenue en transposant  $b$  et  $c$  par exemple, ce qui donne  $\beta = ((1/3)(a + cj + bj^2))^3$ .

Comme l'ensemble de ces deux nombres  $\alpha$  et  $\beta$  est invariant par toutes les permutations de  $a, b, c$ , le polynôme du second degré dont  $\alpha$  et  $\beta$  sont racines se calcule rationnellement en fonction des coefficients de l'équation initiale  $x^3 + nx^2 + px + q = 0$  : c'est  $X^2 + 2qX - p^3 = (X + q + s)(X + q - s)$  où  $s$  est l'une des racines carrées de  $p^3 + q^2$  et où l'on a réécrit l'équation initiale sous la forme équivalente  $x^3 + 3px + 2q = 0$  débarrassée du terme du deuxième degré en effectuant une translation convenable des racines et où l'on a introduit les coefficients 2 et 3 pour simplifier les formules.

Un calcul simple montre alors que chacune des racines  $a, b$  et  $c$ , de l'équation initiale s'exprime comme somme de l'une des trois racines cubiques de  $\alpha$  et de l'une des trois racines cubiques de  $\beta$ , ces deux choix étant liés par le fait que leur produit doit être impérativement égal à  $-p$  (il n'y a donc que trois couples de choix de ces racines à prendre en compte, ce qui est rassurant, à la place des neuf possibilités que l'on aurait pu envisager *a priori*).

C'est à l'occasion de ces formules que l'utilisation des nombres complexes s'est imposée. En effet, même dans le cas où les trois racines sont réelles, il se peut que  $p^3 + q^2$  soit négatif et que  $\alpha$  et  $\beta$  soient nécessairement des nombres complexes.

Si la résolution des équations du troisième degré que nous venons d'exposer a été très longue à être mise au point (sans doute pour au moins l'un de ses cas particuliers entre 1500 et 1515 par Scipione del Ferro), celle du quatrième degré a été plus preste à la suivre puisqu'elle figure également dans l'*Ars magna* (chapitre 39) où Cardano l'attribue à son secrétaire Ludovico Ferrari qui l'aurait mise au point entre 1540 et 1545 (René Descartes en publiera une autre en 1637).

Ici encore, l'on peut partir d'un polynôme débarrassé d'un coefficient, annulé par translation, disons  $X^4 + pX^2 + qX + r = (X - a)(X - b)(X - c)(X - d)$ .

La fonction rationnelle  $\alpha(a, b, c, d)$  la plus simple<sup>§</sup>, ne prenant que trois déterminations différentes sous l'action des vingt-quatre permutations de  $a, b, c$  et  $d$ , est  $\alpha = ab + cd$ . Les deux autres déterminations sont  $\beta = ac + bd$ ,  $\gamma = ad + bc$ . Ce sont donc les racines d'une équation du troisième degré dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction de  $p, q$  et  $r$ . Un calcul simple montre que le polynôme  $(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$  est égal à  $X^3 - pX^2 - 4rX + (4pr - q^2)$ . Il peut donc être décomposé comme on l'a vu plus haut pour en déduire  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ ; en fait, il suffit même de calculer l'une seulement de ces racines, disons  $\alpha$ , pour pouvoir en déduire  $a, b, c$  et  $d$  (nous connaissons alors en effet la somme  $\alpha$  et le produit  $r$  des deux nombres  $ab$  et  $cd$ , donc ces deux nombres eux-mêmes par une équation du second degré, et il ne reste plus qu'à exploiter les égalités  $(a + b) + (c + d) = 0$  et  $ab(c + d) + cd(a + b) = -q$  pour pouvoir en déduire  $a + b$  et  $c + d$ , donc enfin  $a, b, c$  et  $d$  par une autre équation du second degré).

C'est à Joseph Louis Lagrange en 1770 et 1771 (publication en 1772, mais aussi, dans une moindre mesure, à Alexandre Vandermonde dans un mémoire publié en 1774 mais également rédigé vers 1770, ainsi qu'à Edward Waring dans ses *Meditationes algebraicæ* de 1770 et à Francesco Malfatti) que l'on doit la mise en lumière du rôle fondamental des permutations sur les racines  $a, b, c, \dots$  et sur les quantités auxiliaires  $\alpha, \beta, \dots$ , d'ailleurs aujourd'hui justement appelées "résolvantes de Lagrange".

Ces résolvantes ne sont pas uniques, et par exemple le choix  $\alpha = (a + b - c - d)^2$  correspond à la solution de Descartes, mais elles fournissent la clef de toutes les résolutions générales par radicaux. Il y en a une qui est particulièrement belle car elle est covariante pour le groupe affine, c'est à dire vérifie l'égalité,

$$\alpha(\lambda a + z, \lambda b + z, \lambda c + z, \lambda d + z) = \lambda \alpha(a, b, c, d) + z$$

et admet donc une interprétation géométrique. Elle est donnée algébriquement par

$$\alpha = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$$

et correspond géométriquement (figure 2) au point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles  $ABJ$  et  $JCD$  où  $J$  désigne le point d'intersection des droites  $AC$  et  $BD$ .

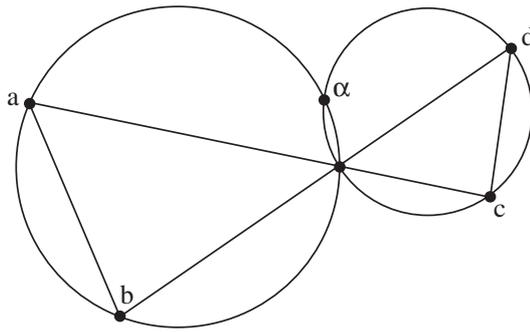


Figure 2. Le point  $\alpha$  est fonction méromorphe et séparément homographique des quatre points  $A, B, C, D$ .

J'ai rencontré récemment cette résolvante à propos du problème<sup>¶</sup> de l'étoile à cinq branches (figure 3), dont elle permet une résolution algébrique que je laisse à la sagacité du lecteur.

<sup>§</sup> Voir [6] pour l'ubiquité de la symétrie en question, et son rôle dans l'organisation des tournois de football

<sup>¶</sup> posé par le président Chinois Jiang Zemin à la délégation de mathématiciens venue à sa rencontre en l'an 2000.

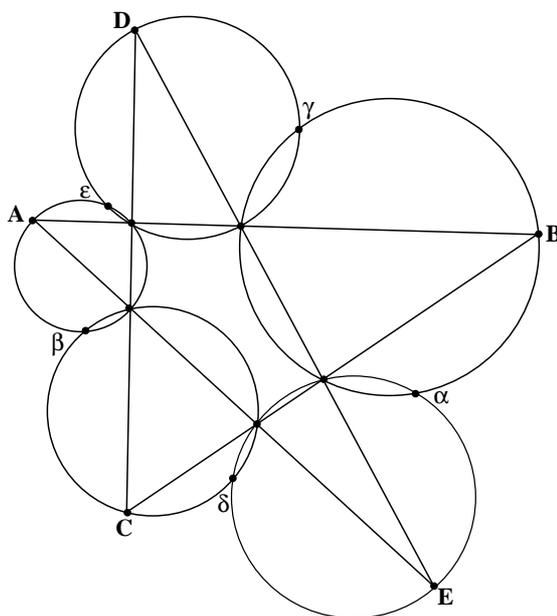


Figure 3. On donne cinq points arbitraires A,B,C,D,E. Montrer que les points d'intersection  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  des cercles circonscrits aux triangles externes consécutifs de l'étoile sont situés sur un même cercle.

L'étape suivante dans la théorie des équations algébriques est évidemment celle du cinquième degré. Descartes a certainement essayé et avec lui bien des chercheurs. Elle a toujours opposé des obstacles infranchissables, et nous savons depuis Abel et Galois, aux alentours de 1830, pourquoi cette quête était vaine.

Descartes par exemple, persuadé qu'il n'existait pas de formule analogue à celle de Cardano, avait proposé en 1637, dans *La Géométrie*, une méthode graphique de résolution grâce à l'intersection de cercles et de cubiques qu'il avait inventées pour l'occasion. Entre 1799 et 1813 (date de l'édition de ses *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*), Paolo Ruffini a publié diverses tentatives de démonstrations, de plus en plus affinées, visant à établir l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré par radicaux. À toute fonction rationnelle des racines, il a eu l'idée juste d'associer le groupe des permutations de ces racines qui laissent invariante, mais a cru à tort (d'après un rapport de Ludwig Sylow) que les radicaux intervenant dans la résolution de l'équation, comme les racines cubiques de  $\alpha$  pour le degré trois, étaient nécessairement des fonctions rationnelles des racines.

Il faudra attendre 1824 pour que Niels Abel justifie l'intuition de Ruffini dans son *Mémoire sur les équations algébriques* et - après avoir cru trouver au contraire une méthode de résolution générale - prouve l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré par radicaux, en 1826 dans le *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, où il amorce une théorie générale qui ne s'épanouira que dans les écrits de Galois, vers 1830. Les travaux de Galois inaugurent une ère nouvelle des mathématiques, où les calculs font place à la réflexion sur leur potentialité, et les concepts, tels celui de groupe abstrait ou d'extension algébrique, occupent le devant de la scène.

L'idée lumineuse de Galois consiste d'abord à associer à une équation arbitraire un groupe de permutations qu'il définit de la manière suivante, [18]

*Soit une équation donnée, dont  $a, b, c, \dots$  sont les  $m$  racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres  $a, b, c, \dots$  qui jouira de la propriété suivante :*

- 1) *que toute fonction des racines, invariante par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue ;*
- 2) *réciquement, que toute fonction des racines, déterminée rationnellement, soit invariante par ces substitutions.*

puis à étudier comment ce groupe “d’ambiguïté” se trouve modifié par l’adjonction de quantités auxiliaires considérées comme “rationnelles”. Ainsi, dans le cas de l’équation du quatrième degré, si l’on adjoint la quantité  $\alpha$  obtenue en résolvant l’équation auxiliaire du troisième degré, l’on réduit le groupe d’ambiguïté au sous-groupe normal formé des quatre permutations  $(a,b,c,d)$ ,  $(b,a,d,c)$ ,  $(c,d,a,b)$ ,  $(d,c,b,a)$ . Ce groupe est le produit de deux groupes à deux éléments et l’adjonction des solutions de deux équations du second degré suffit alors pour éliminer totalement l’ambiguïté, c’est à dire résoudre l’équation initiale.

Si l’on désigne par  $k$  le corps des “quantités rationnelles” et par  $K$  celui engendré par  $k$  et par toutes<sup>||</sup> les racines de l’équation que l’on se propose de résoudre, le groupe de Galois,  $G = \text{Gal}(K : k)$  est le groupe des automorphismes de  $K$  qui fixent tous les éléments de  $k$ .

L’impossibilité de réduire l’équation du cinquième degré à des équations de degré inférieur provient alors de la “simplicité” du groupe  $A_5$  des soixantes permutations paires (produits d’un nombre pair de transpositions) des cinq racines  $a, b, c, d, e$  d’une telle équation. Un groupe abstrait fini est “simple” si l’on ne peut le réduire, par un homomorphisme non trivial, à un groupe plus petit. Le groupe  $A_5$  est le plus petit groupe simple non commutatif et il apparaît très souvent en mathématiques.

J’en viens maintenant au rôle que le groupe de renormalisation devrait jouer pour comprendre la composante connexe du groupe des classes d’idéales de la théorie du corps de classe comme un groupe de Galois.

La théorie du corps de classe et sa généralisation aux groupes de Galois non commutatifs par le programme de Langlands constituent l’information la plus profonde que nous ayons sur le groupe de Galois des nombres algébriques. La source de ces théories est la loi de réciprocité quadratique qui joue un rôle central dans l’histoire de la théorie des nombres. Elle est démontrée en 1801 par Gauss dans ses “Disquisitiones” mais son énoncé était déjà connu d’Euler et de Legendre. La loi de réciprocité exprime, étant donnés deux nombres premiers  $p$  et  $q$ , une symétrie entre  $p$  et  $q$  dans la résolution de l’équation  $x^2 = p$  modulo  $q$ . Elle montre par exemple que pour savoir si l’équation  $x^2 = 5$  admet une solution modulo un nombre premier  $q$  il suffit de connaître la valeur de  $q$  modulo 5 ce que donne le dernier chiffre de  $q$  dans son développement décimal, (par exemple 19 et 1999, ou 7 et 1997 donnent le même résultat) de sorte que les nombres premiers ainsi sélectionnés se répartissent en classes. Il a fallu plus d’un siècle pour comprendre conceptuellement la loi de réciprocité quadratique dont Gauss avait donné plusieurs démonstrations, sous la forme de la théorie du corps de classe qui permet de calculer à partir de classes de nombres idéaux le groupe de Galois de l’extension Abélienne maximale d’un corps de nombres.

La généralisation conceptuelle de la notion de corps de nombres est celle de corps global. Un corps  $k$  est *global* si c’est un sous-corps discret cocompact d’un anneau localement compact (non discret) semi-simple et commutatif  $A$ . (Cf. Iwasawa *Ann. of Math.* **57** (1953).) L’anneau topologique  $A$  est alors canoniquement associé à  $k$  et s’appelle l’anneau des Adèles de  $k$ , on a,

$$A = \prod_{\text{res}} k_v, \quad (62)$$

où le produit est le produit restreint des corps locaux  $k_v$  indexés par les places de  $k$ . Les  $k_v$  sont les corps localement compacts obtenus comme complétions de  $k$  de même que l’on obtient les nombres réels en complétant les rationnels.

Quand la caractéristique de  $k$  est  $p > 1$  i.e. quand  $k$  est un corps de fonctions sur  $\mathbb{F}_q$ , on a

$$k \subset k_{\text{un}} \subset k_{\text{ab}} \subset k_{\text{sep}} \subset \bar{k}, \quad (63)$$

où  $\bar{k}$  désigne une clôture algébrique de  $k$ ,  $k_{\text{sep}}$  la clôture algébrique séparable,  $k_{\text{ab}}$  l’extension abélienne maximale et  $k_{\text{un}}$ , extension non ramifiée maximale, est obtenue en adjoignant à  $k$  les racines de l’unité d’ordre premier à  $p$ .

On définit le groupe de Weil  $W_k$  comme le sous-groupe de  $\text{Gal}(k_{\text{ab}} : k)$  formé par les automorphismes de  $(k_{\text{ab}} : k)$  qui induisent sur  $k_{\text{un}}$  une puissance entière de l’automorphisme de “Frobenius”,  $\theta$ ,

$$\theta(\mu) = \mu^q \quad \forall \mu \text{ racine de l’unité d’ordre premier à } p. \quad (64)$$

<sup>||</sup> Il ne suffit pas d’adjoindre une seule de ces racines, il faut les adjoindre toutes

Le résultat principal de la théorie du corps de classe global est l'existence d'un isomorphisme canonique,

$$W_k \simeq C_k = GL_1(A)/GL_1(k), \quad (65)$$

de groupes localement compacts.

Quand  $k$  est de caractéristique nulle, i.e. un corps de nombres, on a un isomorphisme canonique,

$$\text{Gal}(k_{\text{ab}} : k) \simeq C_k/D_k, \quad (66)$$

où  $D_k$  désigne la composante connexe de l'élément neutre dans le groupe des classes d'idèles  $C_k = GL_1(A)/GL_1(k)$ , mais à cause des places Archimédiennes de  $k$  l'on n'a pas d'interprétation de  $C_k$  analogue au cas des corps de fonctions. Citons A. Weil [27],

“La recherche d'une interprétation pour  $C_k$  si  $k$  est un corps de nombres, analogue en quelque manière à l'interprétation par un groupe de Galois quand  $k$  est un corps de fonctions, me semble constituer l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des nombres à l'heure actuelle ; il se peut qu'une telle interprétation renferme la clef de l'hypothèse de Riemann . . .”

Cela signifie qu'aux places Archimédiennes (i.e. aux complétions de  $k$  qui donnent soit les nombres réels soit les nombres complexes), il devrait y avoir un groupe continu de symétries secrètement présent.

Mon intérêt pour ce problème vient de mon travail sur la classification des facteurs qui indiquait clairement que l'on possédait là l'analogue de la théorie de Brauer qui est l'une des clefs de la théorie du corps de classe local.

Les groupes de Galois sont par construction des limites projectives de groupes finis attachés à des extensions finies. Pour obtenir des groupes connexes il faut évidemment relaxer cette condition de finitude, qui est la même que la restriction en théorie de Brauer aux algèbres simples centrales de dimension finie. Comme ce sont les places Archimédiennes de  $k$  qui sont à l'origine de la composante connexe  $D_k$ , il est naturel de considérer la question préliminaire suivante,

“Existe-t-il une théorie de Brauer non-triviale d'algèbres simples centrales sur  $\mathbb{C}$ .”

J'ai montré dans [5] que la classification des facteurs *approximativement finis* sur  $\mathbb{C}$  donnait une réponse satisfaisante à cette question. Ils sont classifiés par leur module,

$$\text{Mod}(M) \subset \underset{\sim}{\mathbb{R}}_+^*, \quad (67)$$

qui est un sous-groupe (virtuel) fermé de  $\mathbb{R}_+^*$ .

Ce groupe joue un rôle analogue dans le cas Archimédien au module des algèbres simples centrales sur un corps local nonarchimédien. Dans ce dernier cas le module se définit très simplement par l'action du groupe multiplicatif d'une algèbre simple centrale sur la mesure de Haar du groupe additif. La définition de  $\text{Mod}(M)$  pour les facteurs est beaucoup plus élaborée, mais reste basée sur l'action du groupe  $\mathbb{R}_+^*$  de changement d'échelle.

Pour poursuivre l'analogie avec la théorie de Brauer où le lien avec le groupe de Galois s'obtient par la construction d'algèbres simples centrales comme produits croisés d'un corps par un groupe d'automorphismes, le pas suivant consiste à trouver des exemples naturels de construction de facteurs comme produits croisés d'un corps  $K$ , extension transcendante de  $\mathbb{C}$  par un groupe d'automorphismes. Dans nos recherches sur les variétés sphériques noncommutatives [7], avec M. Dubois-Violette, l'algèbre de Sklyanin ([26]) est apparue comme solution en dimension 3, du problème de classification formulé dans [14]. La représentation “régulière” de cette algèbre engendre une algèbre de von-Neumann intégrale directe de facteurs approximativement finis de type  $\text{II}_1$ , tous isomorphes au facteur hyperfini  $R$ . Les homomorphismes correspondants de l'algèbre de Sklyanin ([26]) vers le facteur  $R$  se factorisent miraculeusement à travers le produit croisé du corps  $K_q$  des fonctions elliptiques, où le module  $q = e^{2\pi i\tau}$  est réel, par l'automorphisme de translation par un nombre réel (mais en général irrationnel). On obtient ainsi le facteur  $R$  comme produit croisé de  $K_q$  par un sous-groupe du groupe de Galois, en parfaite analogie avec la construction des algèbres simples centrales sur un corps local. Il reste à obtenir une construction semblable et naturelle du facteur  $R_\infty$  de type  $\text{III}_1$ .

Il est sans doute prématuré d'essayer d'identifier le corps  $K$  correspondant, qui devrait jouer le rôle de l'extension nonramifiée maximale  $\mathbb{C}_{un}$  de  $\mathbb{C}$  et être doté d'une action naturelle du groupe multiplicatif  $\mathbb{R}_+^*$ .

Le rôle du corps  $K$  en physique des hautes énergies devrait être relié à l'observation suivante concernant les "constantes" qui interviennent en théorie des champs. En fait les calculs des physiciens regorgent d'exemples de "constantes" telles les constantes de couplage  $g$  des interactions (électromagnétiques, faibles et fortes) qui n'ont de "constantes" que le nom. Elles dépendent en réalité du niveau d'énergie  $\mu$  auquel les expériences sont réalisées et sont donc des fonctions  $g(\mu)$ . Ainsi les physiciens des hautes énergies étendent implicitement le "corps des constantes" avec lequel ils travaillent, passant du corps  $\mathbb{C}$  des scalaires à un corps de fonctions  $g(\mu)$ . Le générateur du groupe de renormalisation est simplement  $\mu\partial/\partial\mu$ .

L'on peut mettre l'exemple plus simple du corps  $K_q$  des fonctions elliptiques sous la même forme en passant aux fonctions loxodromiques, c'est à dire en posant  $\mu = e^{2\pi iz}$  de sorte que la première périodicité (en  $z \rightarrow z + 1$ ) est automatique alors que la deuxième s'écrit  $g(q\mu) = g(\mu)$ . Le groupe des automorphismes de la courbe elliptique est alors lui aussi engendré par  $\mu\partial/\partial\mu$ .

Les points fixes du groupe de renormalisation sont les scalaires ordinaires, mais il se pourrait que la physique quantique conspire pour nous empêcher d'espérer une théorie qui englobe toute la physique des particules et soit construite comme point fixe du groupe de renormalisation. Les interactions fortes sont asymptotiquement libres et l'on peut les analyser à très hautes énergies en utilisant les points fixes du groupe de renormalisation, mais la présence du secteur électrodynamique montre qu'il est vain de vouloir s'en tenir à de tels points fixes pour décrire une théorie qui incorpore l'ensemble des forces observées. Le problème est le même dans le domaine infrarouge où les rôles des interactions fortes et électrodynamiques sont inversés.

Il est bien connu des physiciens que le groupe de renormalisation joue le rôle d'un groupe d'ambiguïté, l'on ne peut distinguer entre elles deux théories physiques qui appartiennent à la même orbite de ce groupe, ce qui nous ramène à Galois dont la "théorie de l'ambiguïté" allait bien au delà des équations algébriques.

Citons Émile Picard (voir [25]) qui dans sa préface aux œuvres complètes d'Evariste Galois écrivait, "Il aurait édifié dans ses parties essentielles, la théorie des fonctions algébriques d'une variable telle que nous la connaissons aujourd'hui. Les méditations de Galois portèrent encore plus loin; il termine sa lettre en parlant de l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. On devine à peu près ce qu'il entend par là, et sur ce terrain qui, comme il le dit est immense, il reste encore aujourd'hui bien des découvertes à faire".

## Références

- [1] A. Beauville, *Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann*, Séminaire Bourbaki, 45ème année, 1992-1993, n.765.
- [2] N. N. Bogoliubov, O. Parasiuk Acta Math. **97**, 227 (1957);  
K. Hepp, Commun.Math.Phys. **2**, 301 (1966).
- [3] A. Bolibruch, *Fuchsian systems with reducible monodromy and the Riemann-Hilbert problem*, Lecture Notes in Math. **1520**, 139-155(1992).
- [4] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge monographs in math. physics, Cambridge University Press (1984).
- [5] A. Connes, *Noncommutative Geometry and the Riemann Zeta Function*, Mathematics : Frontiers and perspectives, IMU 2000 volume.
- [6] A. Connes, *Symétries, de Galois au monde quantique*, Volume en l'honneur de Louis Michel (à paraître).

- [7] A. Connes, M. Dubois-Violette, *Noncommutative finite-dimensional manifolds. I. spherical manifolds and related examples*. Math QA/0107070
- [8] A. Connes, D. Kreimer, *Lett. Math. Phys.* **48**, 85 (1999); hep-th/9904044.
- [9] A. Connes, D. Kreimer, *Commun. Math. Phys.* **199**, 203 (1998); hep-th/9808042.
- [10] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and Noncommutative geometry*, *Comm. Math. Phys.* **199**, (1998) 203-242.
- [11] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert problem*, *J.High Energy Phys.* 09, 024 (1999).
- [12] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert problem I*, *Comm. Math. Phys.* **210** (2000).
- [13] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II, the  $\beta$  function, diffeomorphisms and the renormalization group*; hep-th/0003188, *Comm. Math. Phys.* (2001).
- [14] A. Connes, G. Landi, *Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations*, math.QA/0011194.
- [15] A. Connes, H. Moscovici, *Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem*, *Comm. Math. Phys.* **198**, (1998) 199-246.
- [16] M. Dresden, *Renormalization in historical perspective - The first stage*, in *Renormalization*, ed. L. Brown, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1994).
- [17] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau, R. Seneor, *Massive Gross-Neveu model : a rigorous perturbative construction*, *Phys. Rev. Lett.* **54**, (1985).
- [18] É. Galois, *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*. Gauthier Villars, Paris, London (1962).
- [19] K. Gawedzki, A. Kupiainen, *Exact renormalization of the Gross-Neveu model of quantum fields*, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985).
- [20] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1987).
- [21] G. 't Hooft, *Nuclear Physics B* **61**, 455 (1973).
- [22] T. Krajewski, R. Wulkenhaar, *Eur.Phys.J.* **C7**, 697-708 (1999); hep-th/9805098.
- [23] D. Kreimer, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2.2**, 303 (1998); q-alg/9707029.
- [24] I. Lappo-Danilevskii, *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*, Chelsea, New York (1953).
- [25] J. P. Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques, Panoramas et synthèses*, S. M. F. (1993), Tome **121**.
- [26] E.K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*, *Func. Anal. Appl.* **16**, (1982), 263-270.
- [27] A. Weil, *Sur la théorie du corps de classe*, *J. Math. Soc. Japan* **3**, (1951).