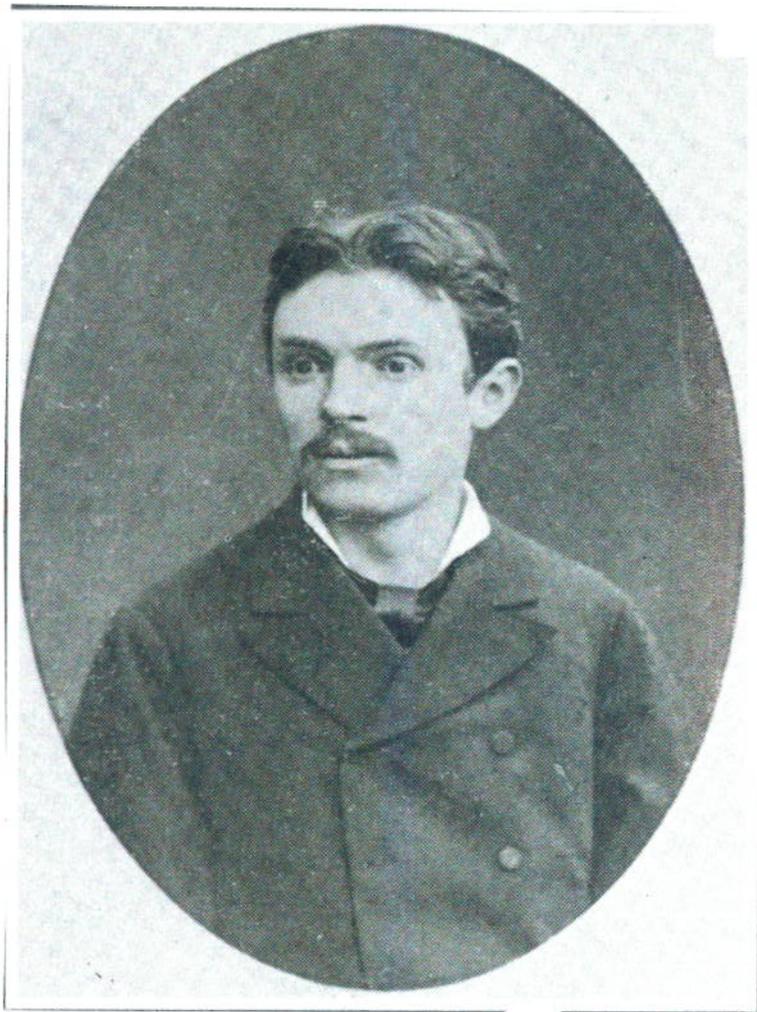


POINCARÉ & LE PROBLÈME DES TROIS CORPS



ALAIN CHENCINER, IMCC & UNIV. PARIS 7



1881

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES DÉFINIES

PAR

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Journal de Mathématiques, 3^e série, t. 7, p. 375-422 (1881) et t. 8, p. 251-296 (1882).

D'ailleurs, cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons pour exemple le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux des corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps? Et si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de Géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites?

Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres. Je n'ai pas eu la prétention de le parcourir tout entier, mais j'ai voulu du moins en franchir les frontières, et je me suis restreint à un cas très particulier, celui qui se présente d'abord tout naturellement, c'est-à-dire à l'étude des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.



SUR LES COURBES DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4^e série, t. 1, p. 167-244 (1885).

CHAPITRE X.

STABILITÉ ET INSTABILITÉ.

On n'a pu lire les deux premières Parties de ce Mémoire sans être frappé de la ressemblance que présentent les diverses questions qui y sont traitées avec le grand problème astronomique de la stabilité du système solaire. Ce dernier problème est, bien entendu, beaucoup plus compliqué, puisque les équations différentielles du mouvement des corps célestes sont d'ordre très élevé. Il y a même plus, on rencontrera, dans ce problème, une difficulté nouvelle, essentiellement différente de celles que nous avons eu à surmonter dans l'étude du premier ordre, et j'ai l'intention de la faire ressortir, sinon dans cette troisième Partie, du moins dans la suite de ce travail.

1885

FIRST APPEARANCE
OF THE MAIN ACTORS:

PERIODIC
SOLUTIONS



1883

SUR CERTAINES SOLUTIONS PARTICULIÈRES DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 97, p. 251-252 (23 juillet 1883).

M. Kronecker a présenté à l'Académie de Berlin, en 1869, un Mémoire sur les fonctions de plusieurs variables; on y trouve un important théorème d'où il est aisé de déduire le résultat suivant :

Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ n fonctions continues de n variables x_1, x_2, \dots, x_n ; la variable x_i est assujettie à varier entre les limites $+a_i$ et $-a_i$. Supposons que, pour $x_i = a_i$, ξ_i soit constamment positif, et pour $x_i = -a_i$ constamment négatif; je dis qu'il existera un système de valeurs des x pour lequel tous les ξ s'annuleront.

Ce résultat peut s'appliquer au problème des trois corps et montre que ce problème admet une infinité de solutions particulières jouissant de propriétés remarquables que nous allons exposer. Nous nous restreignons, bien entendu, au cas où les masses de deux des corps sont très petites.

Le mouvement est périodique, c'est-à-dire que, lorsque le temps augmente d'une période constante, les trois corps reprennent la même position *relative*. A la fin d'une période, les distances des trois corps reprennent leur valeur initiale, ainsi que les vitesses relatives estimées soit dans la direction du rayon vecteur, soit dans la direction perpendiculaire. Le système entier a seulement tourné d'un certain angle autour du centre de gravité, supposé fixe.

Les excentricités sont très petites et de l'ordre des masses; mais les inclinaisons peuvent avoir des valeurs quelconques.

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 33, p. 375-407 (1912).

AND THE

LAST ONE



§ 1. Introduction.

Je n'ai jamais présenté au public un travail aussi inachevé; je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques mots les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai démontré, il y a longtemps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.

J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. J'ai été obligé d'envisager séparément un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que j'aie pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème dans tous ceux que j'ai traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration générale, soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défaut.

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermisait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

1912

SUR LE
PROBLÈME DES TROIS CORPS

ET LES
ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ
À PARIS.

MÉMOIRE COURONNÉ
DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II

LE 21 JANVIER 1889.

AVEC DES NOTES

PAR L'AUTEUR.

INTRODUCTION OF THE MEMOIR (1889) (NON CORRECTED VERSION)

En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant:

Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Dans ce cas particulier, j'ai démontré rigoureusement la stabilité, non seulement en montrant que le rayon vecteur de la petite planète ne peut croître indéfiniment, mais en lui fixant sinon ses limites précises, au moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

TABLE OF CONTENTS OF THE MEMOIR (NON CORRECTED VERSION 1889)

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Introduction.....	5
Première partie.	
Généralités.	
Chapitre I. Notations et définitions.....	9
Chapitre II. Théorie des invariants intégraux.	
§ 1. Propriétés diverses des équations de la dynamique.....	14
§ 2. Définition des invariants intégraux.....	21
§ 3. Transformations des invariants intégraux.....	25
§ 4. Usage des invariants intégraux.....	31
Chapitre III. Théorie des solutions périodiques.	
§ 1. Existence des solutions périodiques.....	48
§ 2. Exposants caractéristiques.....	58
§ 3. Solutions périodiques des équations de la dynamique.....	65
§ 4. Calcul des exposants caractéristiques.....	80
§ 5. Solutions asymptotiques.....	88
Deuxième partie.	
Equations de la dynamique et problème des n corps.	
Chapitre I. Etude du cas où il n'y a que deux degrés de liberté.	
§ 1. Représentations géométriques diverses.....	97
§ 2. Equation des surfaces asymptotiques.....	112
§ 3. Construction des surfaces asymptotiques (première approximation).....	122
§ 4. Construction exacte des surfaces asymptotiques.....	135
§ 5. Solutions périodiques du 2 ^m genre.....	144

Chapitre II. Résumé général des résultats.	
§ 1. Résultats positifs.....	153
§ 2. Résultats négatifs.....	155
Chapitre III. Tentatives de généralisation.....	158

Notes.

A. Sur la divergence des séries de M. Lindstedt.....	163
B. Nouvel exposé des résultats.....	174
C. Sur les invariants intégraux.....	183
D. Sur les équations linéaires à coefficients périodiques.....	188
E. Sur le calcul des limites.....	193
F. Sur les surfaces asymptotiques.....	219
G. Sur la non-existence des intégrales uniformes.....	243
H. Sur les exposants caractéristiques.....	249
I. Sur les solutions asymptotiques.....	251

CHAPTER ADDED IN THE
CORRECTED VERSION OF 1890

Deuxième partie.

	Pages.
Chapitre II. Etudes des surfaces asymptotiques.	
§ 16. Exposé du problème.....	181
§ 17. Première approximation.....	184
§ 18. Deuxième approximation.....	197
§ 19. Troisième approximation.....	219

1892

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME I.

Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes.
Solutions asymptotiques.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

(Tous droits réservés.)

TABLE DES MATIÈRES
DU TOME PREMIER.

Table listing chapters and page numbers: INTRODUCTION (1), CHAPITRE I. GÉNÉRALITÉS ET MÉTHODE DE JACOBI (7-45), CHAPITRE II. INTÉGRATION PAR LES SÉRIES (48-77).

CHAPITRE III.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES.

	Pages.
Solutions périodiques.....	79
Cas où le temps n'entre pas explicitement.....	89
Application au Problème des trois Corps.....	95
Solutions de la première sorte.....	97
Recherches de M. Hill sur la Lune.....	104
Application au problème général de la Dynamique.....	109
Cas où le hessien est nul.....	117
Calcul direct des séries.....	120
Démonstration directe de la convergence.....	128
Examen d'un important cas d'exception.....	133
Solution de la deuxième sorte.....	139
Solution de la troisième sorte.....	144
Applications des solutions périodiques.....	152
Satellites de Jupiter.....	154
Solutions périodiques dans le voisinage d'une position d'équilibre.....	156

CHAPITRE IV.

EXPOSANTS CARACTÉRISTIQUES.

Équations aux variations.....	162
Application à la théorie de la Lune.....	164
Équations aux variations de la Dynamique.....	166
Application de la théorie des substitutions linéaires.....	172
Définition des exposants caractéristiques.....	176
Équation qui définit ces exposants.....	178
Cas où le temps n'entre pas explicitement.....	179
Nouvel énoncé du théorème des n° 37 et 38.....	180
Cas où les équations admettent des intégrales uniformes.....	184
Cas des équations de la Dynamique.....	192
Changements de variables.....	198
Développement des exposants. — Calcul des premiers termes.....	201
Application au Problème des trois Corps.....	217
Calcul complet des exposants caractéristiques.....	218
Solutions dégénérantes.....	228

CHAPITRE V.

NON-EXISTENCE DES INTÉGRALES UNIFORMES.

Non-existence des intégrales uniformes.....	233
Cas où les B s'annulent.....	240
Cas où le hessien est nul.....	245

	Pages
Application au Problème des trois Corps.....	250
Problèmes de Dynamique où il existe une intégrale uniforme.....	254
Intégrales non holomorphes en μ	259
Discussion des expressions (14).....	261

CHAPITRE VI.

DÉVELOPPEMENT APPROCHÉ DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

Énoncé du problème.....	269
Digression sur une propriété de la fonction perturbatrice.....	271
Principes de la méthode de M. Darboux.....	278
Extension aux fonctions de plusieurs variables.....	280
Recherche des points singuliers.....	285
Discussion.....	293
Discussion dans le cas général.....	305
Application de la méthode de M. Darboux.....	314
Application à l'Astronomie.....	325
Application à la démonstration de la non-existence des intégrales uniformes.....	325

CHAPITRE VII.

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES.

Solutions asymptotiques.....	335
Convergence des séries.....	338
Solutions asymptotiques des équations de la Dynamique.....	344
Développement de ces solutions selon les puissances de $\sqrt{\mu}$	345
Divergence des séries du n° 108.....	350
Démonstration nouvelle de la proposition du n° 108.....	353
Transformation des équations.....	362
Réduction à la forme canonique.....	368
Forme des fonctions V_i	370
Lemme fondamental.....	373
Analogie des séries du n° 108 avec celle de Stirling.....	378

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

1893

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME II.

Méthodes de MM. Newcomb, Gylden, Lindstedt et Bohlin.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55

1893

(Tous droits réservés.)

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DEUXIÈME.

CHAPITRE VIII.

CALCUL FORMEL.

	Pages.
Divers sens du mot <i>convergence</i>	1
Séries analogues à celles de Stirling.....	2
Calcul de ces séries.....	4

CHAPITRE IX.

MÉTHODES DE MM. NEWCOMB ET LINDSTEDT.

Historique.....	15
Exposé de la méthode.....	17
Diverses formes des séries.....	24
Calcul direct des séries.....	28
Comparaison avec la méthode de M. Newcomb.....	34

CHAPITRE X.

APPLICATION A L'ÉTUDE DES VARIATIONS SÉCULAIRES.

Exposé de la question.....	38
Nouveau changement de variables.....	40
Application de la méthode du Chapitre IX.....	44

CHAPITRE XI.

APPLICATION AU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Difficulté du problème.....	47
Extension de la méthode du Chapitre IX à certains cas singuliers.....	48
Application au Problème des trois Corps.....	56
Changement de variables.....	57
Cas des orbites planes.....	59
Étude d'une intégrale particulière.....	65
Forme des développements.....	67
Cas général du Problème des trois Corps.....	69

CHAPITRE XII.

APPLICATION AUX ORBITES PEU EXCENTRIQUES.

	Pages.
Exposé de la difficulté.....	74
Solution de la difficulté.....	82

CHAPITRE XIII.

DIVERGENCE DES SÉRIES DE M. LINDSTEDT.

Discussion des séries (3).....	95
Discussion des séries (2).....	99
Comparaison avec les méthodes anciennes.....	105

CHAPITRE XIV.

CALCUL DIRECT DES SÉRIES.

Application au Problème des trois Corps.....	126
Propriétés diverses.....	136
Cas particuliers remarquables.....	150
Conclusions.....	156

CHAPITRE XV.

AUTRES PROCÉDÉS DE CALCUL DIRECT.

Problème du n° 125.....	157
Autre exemple.....	160
Problème du n° 134.....	169
Problème des trois Corps.....	177

CHAPITRE XVI.

MÉTHODES DE M. GYLDÉN.

Réduction des équations.....	202
Orbite intermédiaire.....	223
Orbite absolue.....	225

CHAPITRE XVII.

CAS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Étude de l'équation de M. Gylden.....	229
Méthode de Jacobi.....	247
Méthode de M. Gylden.....	251
Méthode de M. Bruns.....	253

	Pages.
Méthode de M. Lindstedt.....	255
Méthode de M. Hill.....	260
Application du théorème de M. Hadamard.....	266
Remarques diverses.....	275
Extension des résultats précédents.....	277

CHAPITRE XVIII.

CAS DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

Équations à second membre.....	281
Équation de l'évection.....	285
Équation de la variation.....	304
Résumé.....	310
Généralisation des solutions périodiques.....	311

CHAPITRE XIX.

MÉTHODES DE M. BOHLIN.

Méthode de Delaunay.....	315
Méthode de M. Bohlin.....	343
Cas de la libration.....	352
Cas limite.....	366
Relation avec les séries du n° 125.....	383
Divergence des séries.....	388

CHAPITRE XX.

SÉRIES DE M. BOHLIN.

Cas de la libration.....	399
Cas limite.....	404
Comparaison avec les séries du n° 127.....	418

CHAPITRE XXI.

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE M. BOHLIN

Extension au Problème du n° 134.....	422
Extension au Problème des trois Corps.....	436
Seconde méthode.....	444
Cas de la libration.....	448
Divergence des séries.....	452

1899

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

TOME III.

Invariants intégraux. — Solutions périodiques du deuxième genre.
Solutions doublement asymptotiques.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Tous droits réservés.)

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TROISIÈME.

CHAPITRE XXII.

INVARIANTS INTÉGRAUX.

	Pages.
Mouvement d'un fluide permanent.....	1
Définition des invariants intégraux.....	4
Relations entre les invariants et les intégrales.....	7
Invariants relatifs.....	9
Relation entre les invariants et l'équation aux variations.....	15
Transformation des invariants.....	19
Autres relations entre les invariants et les intégrales.....	26
Changements de variables.....	30
Remarques diverses.....	32

CHAPITRE XXIII.

FORMATION DES INVARIANTS.

Emploi du dernier multiplicateur.....	40
Équations de la Dynamique.....	43
Les invariants intégraux et les exposants caractéristiques.....	48
Emploi des variations képlériennes.....	63
Remarque sur l'invariant du n° 256.....	66
Cas du problème réduit.....	69

CHAPITRE XXIV.

USAGE DES INVARIANTS INTÉGRAUX.

	Pages.
Procédés de vérification.....	71
Rapport avec un théorème de Jacobi.....	79
Application au Problème des deux corps.....	81
Application aux solutions asymptotiques.....	85

CHAPITRE XXV.

INVARIANTS INTÉGRAUX ET SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES.

Retour sur la méthode de Bohlén.....	88
Relation avec les invariants intégraux.....	111
Autre mode de discussion.....	116
Invariants quadratiques.....	127
Cas du problème restreint.....	131

CHAPITRE XXVI.

STABILITÉ A LA POISSON.

Diverses définitions de la stabilité.....	140
Mouvement d'un liquide.....	142
Probabilités.....	151
Extension des résultats précédents.....	155
Application au problème restreint.....	157
Application au Problème des trois corps.....	165

CHAPITRE XXVII.

THÉORIE DES CONSÉQUENTS.

Théorie des conséquents.....	175
Courbes invariantes.....	178
Extension des résultats précédents.....	187
Application aux équations de la Dynamique.....	190
Application au problème restreint.....	196

CHAPITRE XXVIII.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU DEUXIÈME GENRE.

	Pages.
Solutions périodiques du deuxième genre.....	201
Cas où le temps n'entre pas explicitement.....	207
Application aux équations de la Dynamique.....	214
Solutions du deuxième genre des équations de la Dynamique.....	226
Théorèmes sur les maxima.....	230
Existence des solutions du deuxième genre.....	240
Remarque.....	244
Cas particuliers.....	245

CHAPITRE XXIX.

DIVERSES FORMES DU PRINCIPE DE MOINDRE ACTION.

Diverses formes du principe de moindre action.....	249
Foyers cinétiques.....	261
Foyers maupertuisiens.....	266
Application aux solutions périodiques.....	269
Cas des solutions stables.....	270
Solutions instables.....	272

CHAPITRE XXX.

FORMATION DES SOLUTIONS DU DEUXIÈME GENRE.

Formation des solutions du deuxième genre.....	294
Formation effective des solutions.....	296
Discussion.....	311
Discussion des cas particuliers.....	322
Application aux équations du n° 13.....	323

CHAPITRE XXXI.

PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS DU DEUXIÈME GENRE.

Les solutions du deuxième genre et le principe de moindre action.....	331
Stabilité et instabilité.....	343
Application aux orbites de Darwin.....	352

CHAPITRE XXXII.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUXIÈME ESPÈCE.

	Pages.
Solutions périodiques de deuxième espèce.....	362

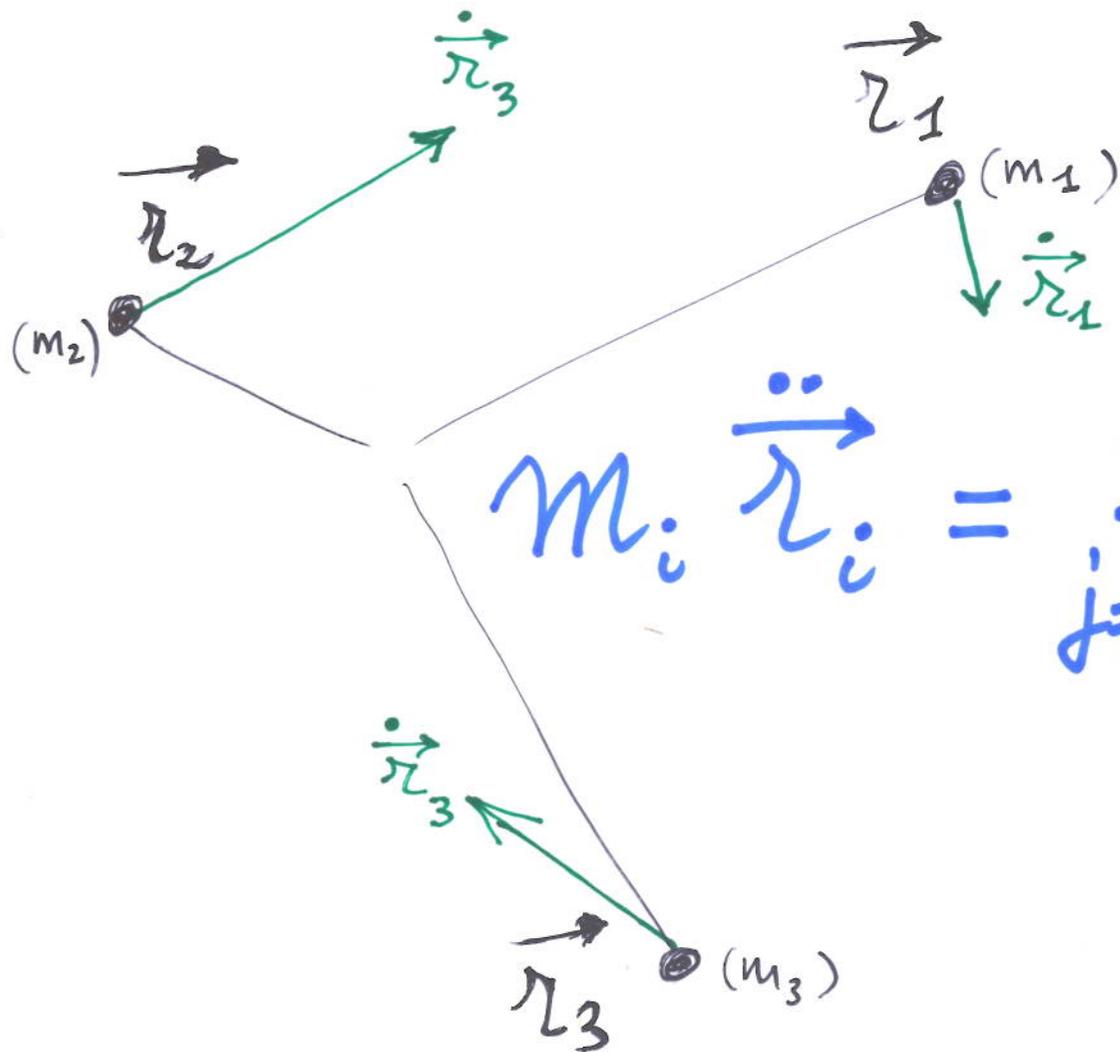
CHAPITRE XXXIII.

SOLUTIONS DOUBLEMENT ASYMPTOTIQUES.

Modes divers de représentation géométrique.....	372
Solutions homoclines.....	384
Solutions hétéroclines.....	391
Comparaison avec le n° 225.....	395
Exemples de solutions hétéroclines ...	397

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME TROISIÈME ET DERNIER.

THE THREE-BODY PROBLEM



$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i}$$

$$\frac{m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}$$

DIMENSIONS

	3 corps dans \mathbb{R}^3	3 corps dans \mathbb{R}^2	Problème restreint (circulaire plan)
Coordonnées de position	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 2 = 6$	2
Coordonnées de vitesse	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 2 = 6$	2
Réduction des translations	- 6	- 4	/
Réduction des rotations	- 3 - 1	- 1 - 1	+ 1 - 1
Fixation de l'énergie	- 1	- 1	- 1
	7	5	3

↓ Surface de section
2

Problème général de la Dynamique.

13. Nous sommes donc conduit à nous proposer le problème suivant :

Étudier les équations canoniques

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{dF}{dx_i},$$

en supposant que la fonction F peut se développer suivant les puissances d'un paramètre très petit μ de la manière suivante :

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots,$$

en supposant de plus que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y ; et que F_1, F_2, \dots sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport aux y .

2 PROBLEMS

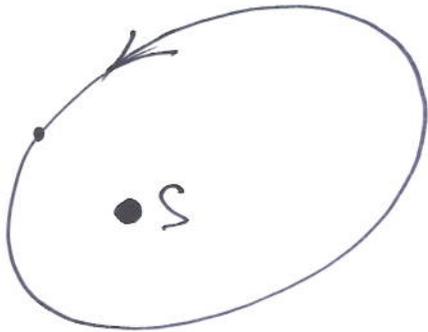
(NON) - INTEGRABILITY

(IN) - STABILITY

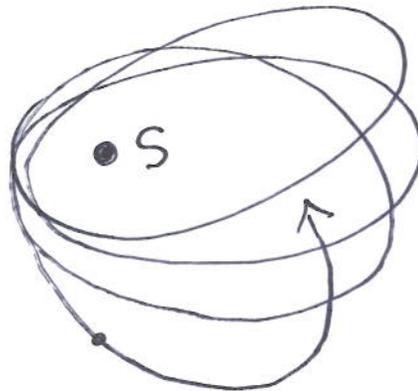
RESTRICTED PROBLEM

(Poincaré studies the planetary case)

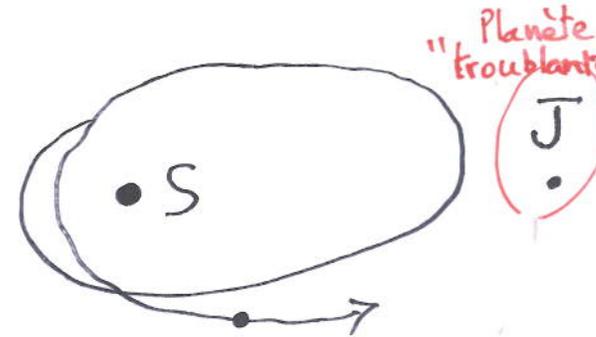
Problème "non trouble"
(ellipses de Kepler)



Problème "non trouble"
en repère tournant
(ellipses avec précession)



Problème restreint
en repère tournant



PÉRIODIQUE

QUASI-PÉRIODIQUE

$M=0$, INTÉGRABLE, STABLE

?

$M \neq 0$

THE KEY : PERIODIC SOLUTIONS

MNMC Tome I § 36

82

CHAPITRE III.

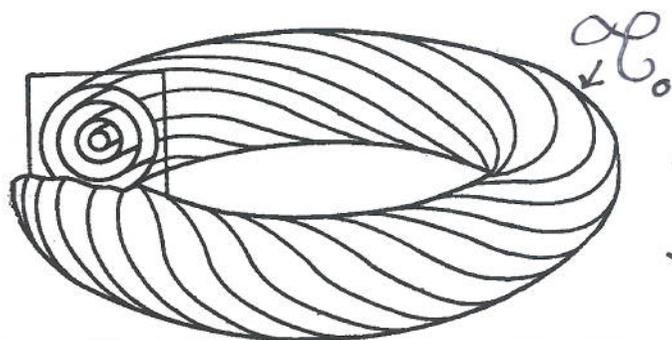
Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.

Étant données des équations de la forme définie dans le n° 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.

WHY? BREAKING OF RESONANT TORI

GENERIC PERIODIC SOLUTIONS

Hamiltonian $F_0(x)$
 completely integrable
 highly \Downarrow NON GENERIC



from ARNOLD 1963

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F_0}{\partial y} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial x} = (\omega_1, \omega_2, \dots)$$

frequencies

Perturbed Hamiltonian
 $F(x, y) = F_0(x) + \mu F_1(x, y)$

if non resonant, $\mathcal{L}_0 =$ closure of one solution

DYNAMICALLY DEFINED

\Downarrow
MAY RESIST OR NOT TO PERTURBATION
 (Vol II, § 149, ... KAM)

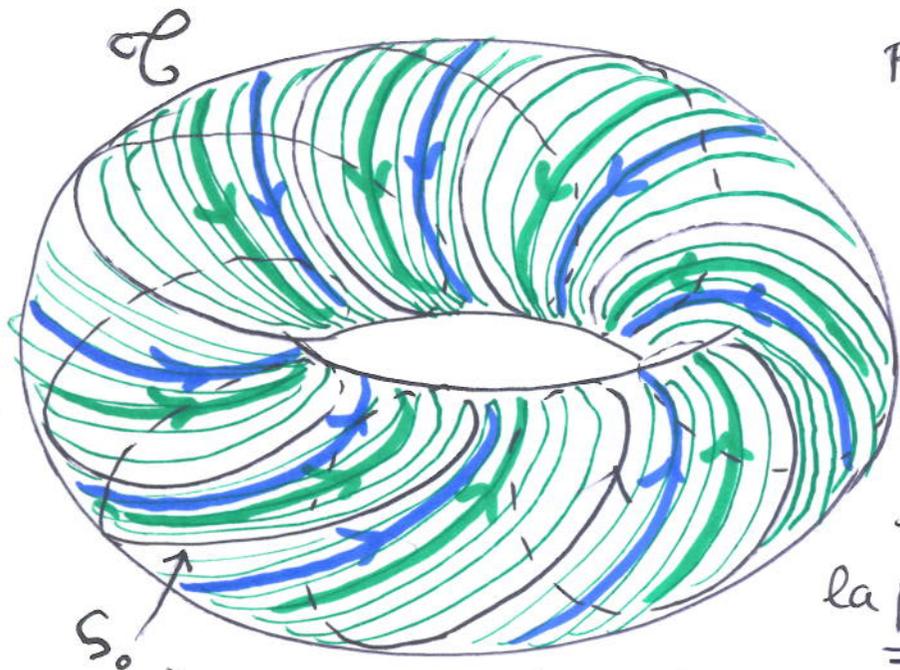
if completely resonant

$\mathcal{L}_0 =$ mere union of periodic solutions

NOT DYNAMICALLY DEFINED

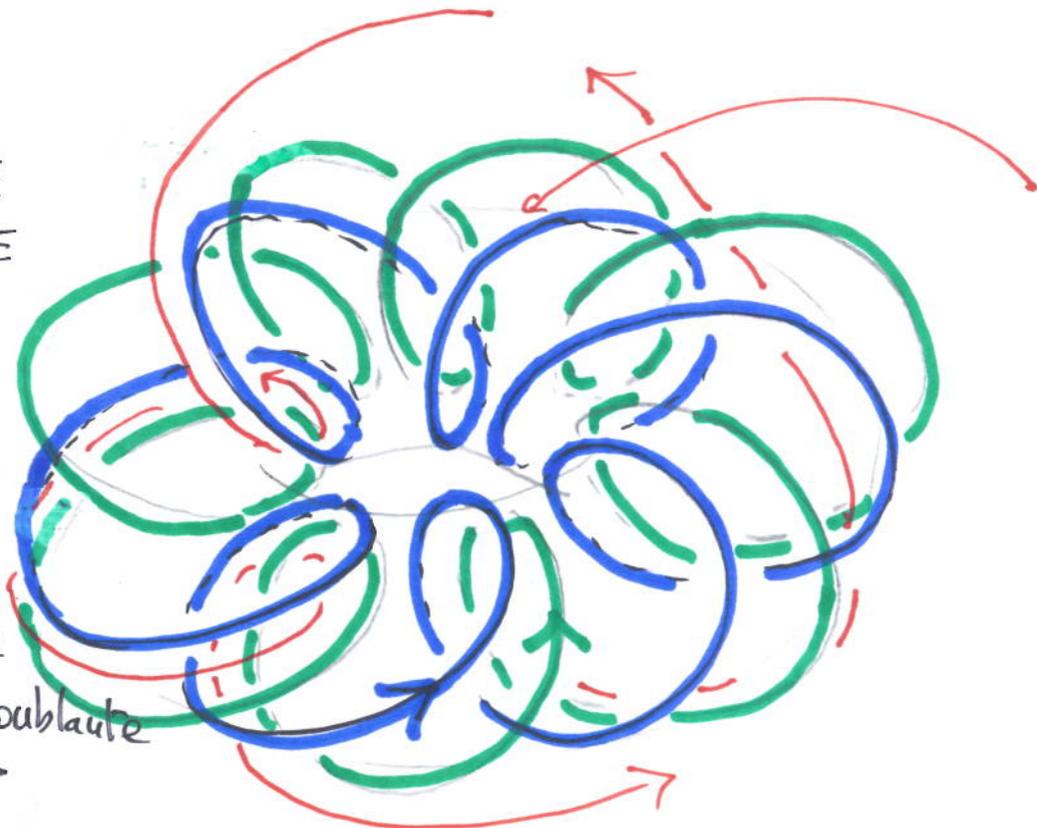
should BREAK into FINITE # of GENERIC PERIODIC SOLUTIONS
 (Vol I exponents ch. IV)





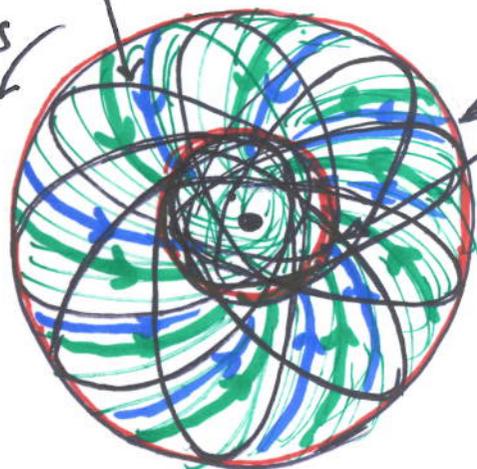
PHASE SPACE

effet de la planète troublante
 \implies



\Downarrow projection

Rotations



caustics
 (= circles)

CONFIGURATION SPACE

THE CONSEQUENCE OF THE EXISTENCE OF "GENERIC" PERIODIC SOLUTIONS:

NON - INTEGRABILITY

Vol. I
Ch. V & VI

Fourier coefficients
of the perturbing
function.

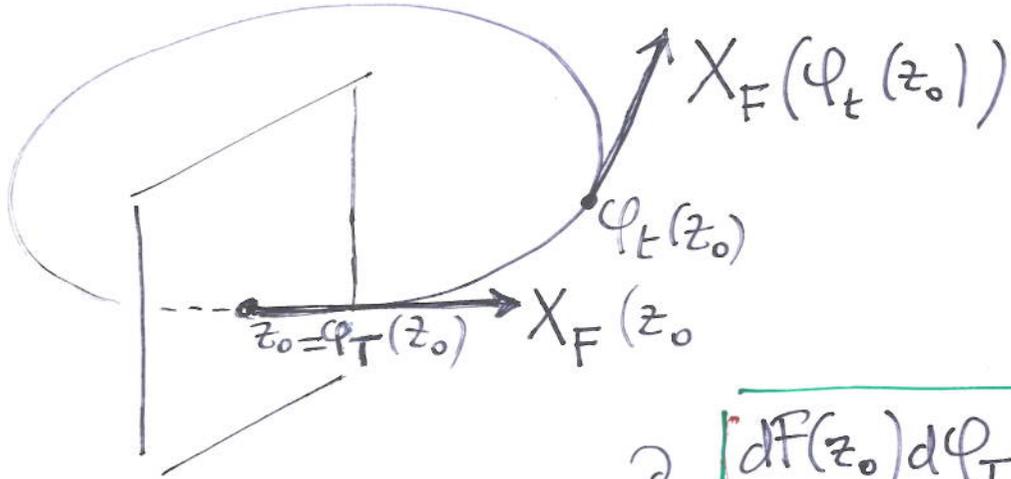
NON-EXISTENCE DES INTÉGRALES UNIFORMES.

251

Nous devons donc conclure que, dans ce cas particulier du problème des trois Corps, il n'y a pas d'intégrale uniforme distincte de F .

Dans mon Mémoire des *Acta mathematica* (t. XIII), je me suis servi pour établir le même point de l'existence des solutions périodiques et du fait que les exposants caractéristiques ne sont pas nuls. La démonstration que je donne ici ne diffère de celle des *Acta* que par la forme, mais elle se prête mieux à la généralisation qui va suivre.

THE PROOF IN THE MEMOIR



$$\varphi_T \circ \varphi_t(z_0) = \varphi_t(z_0)$$

$\downarrow \partial/\partial t$

$$\boxed{d\varphi_T(z_0) X_F(z_0) = X_F(z_0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} F(\varphi_t(z_0)) = F(z_0) \\ \Phi(\varphi_t(z_0)) = \Phi(z_0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z_0} \left[\begin{array}{l} dF(z_0) d\varphi_T(z_0) = dF(z_0) \\ d\Phi(z_0) d\varphi_T(z_0) = d\Phi(z_0) \end{array} \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\begin{array}{l} dF(z_0) X_F(z_0) = 0 \\ d\Phi(z_0) X_F(z_0) = 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Exercise : $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{either } dF(z_0) \text{ and } d\Phi(z_0) \text{ dependent} \\ \text{or non-diagonal } d\varphi_T(z_0) \text{ has } \geq 3 \text{ exponents } = 0 \end{array} \right.$

\Downarrow
non-generic

• End of the proof :

\exists of per. sol. which are generic for $\mu \neq 0$ (not uniform in μ !)

$\xrightarrow{\mu=0}$ unperturbed per. sol. which are dense

THE CONSEQUENCE OF THE EXISTENCE OF "GENERIC" PERIODIC SOLUTIONS (2):

DIVERGENCE OF LINDSTEDT SERIES WITH VARIABLE FREQUENCIES

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x^0 + \mu \phi_1(\omega) + \mu^2 \phi_2(\omega) + \dots \\ y = \omega + \mu \psi_1(\omega) + \mu^2 \psi_2(\omega) + \dots \\ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \quad \omega_i(t) = \bar{\omega}_i(\mu) + \underbrace{n_i(\mu)}_{\text{frequencies}} t \end{array} \right.$$

end of § 148

Il en résulte que les $2n$ exposants caractéristiques sont nuls. Or nous savons qu'il n'en est pas ainsi en général.

Donc, en général, les séries (2) ne convergeront pas uniformément quand μ et les x_i^0 varieront dans un certain intervalle.

C. Q. F. D.

THE END OF § 149 CONTEMPLATING THE POSSIBILITY OF K.A.M.

DIVERGENCE DES SÉRIES DE M. LINDSTEDT. p. 104/105

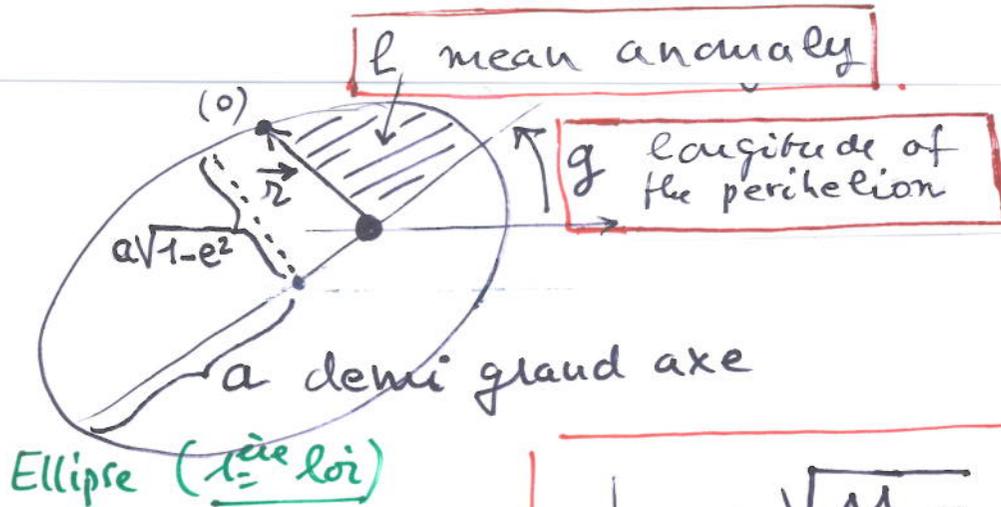
Ne peut-il pas arriver que les séries (2) convergent quand on donne aux x_i^0 certaines valeurs convenablement choisies ?

Supposons, pour simplifier, qu'il y ait deux degrés de liberté; les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est assujéti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ?

Les raisonnements de ce Chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable.

DELAUNAY VARIABLES (L, G, l, g)

Action-angle variables¹¹ of the unperturbed motion of the 0-mass body around $\left\{ \begin{array}{l} \text{the SUN in the planetary case} \\ \text{the EARTH in the lunar case} \end{array} \right.$



$$\ddot{\vec{x}} = - \frac{M \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$$

$$F_K = \frac{\|\dot{\vec{x}}\|^2}{2} - \frac{M}{\|\vec{x}\|} = - \frac{M^2}{2L^2} < 0$$

$$L = \sqrt{Ma}, \quad G = \pm \sqrt{Ma(1-e^2)}$$

(moment cinétique)
nodulaire

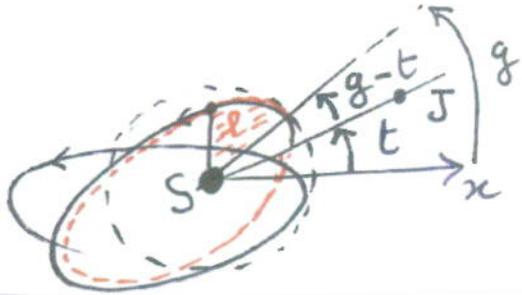
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL}{dt} = - \frac{\partial F_K}{\partial l} = 0, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{\partial F_K}{\partial L} = \frac{M^2}{L^3} \quad (= n) \\ \frac{dG}{dt} = - \frac{\partial F_K}{\partial g} = 0, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial F_K}{\partial G} = 0 \end{array} \right.$$

3^e loi

$$n^2 a^3 = M$$

3^e loi

KEPLER PROBLEM IN ROTATING FRAME



$$F_0 = -\frac{1}{2L^2} - G$$

Z NOT ADAPTED TO SOLUTIONS

- ↙ CIRCULAR
- ↘ COLLISION

L, l quick variables
 G, g slow (= secular) variables

PLANAR CIRCULAR RESTRICTED PROBLEM

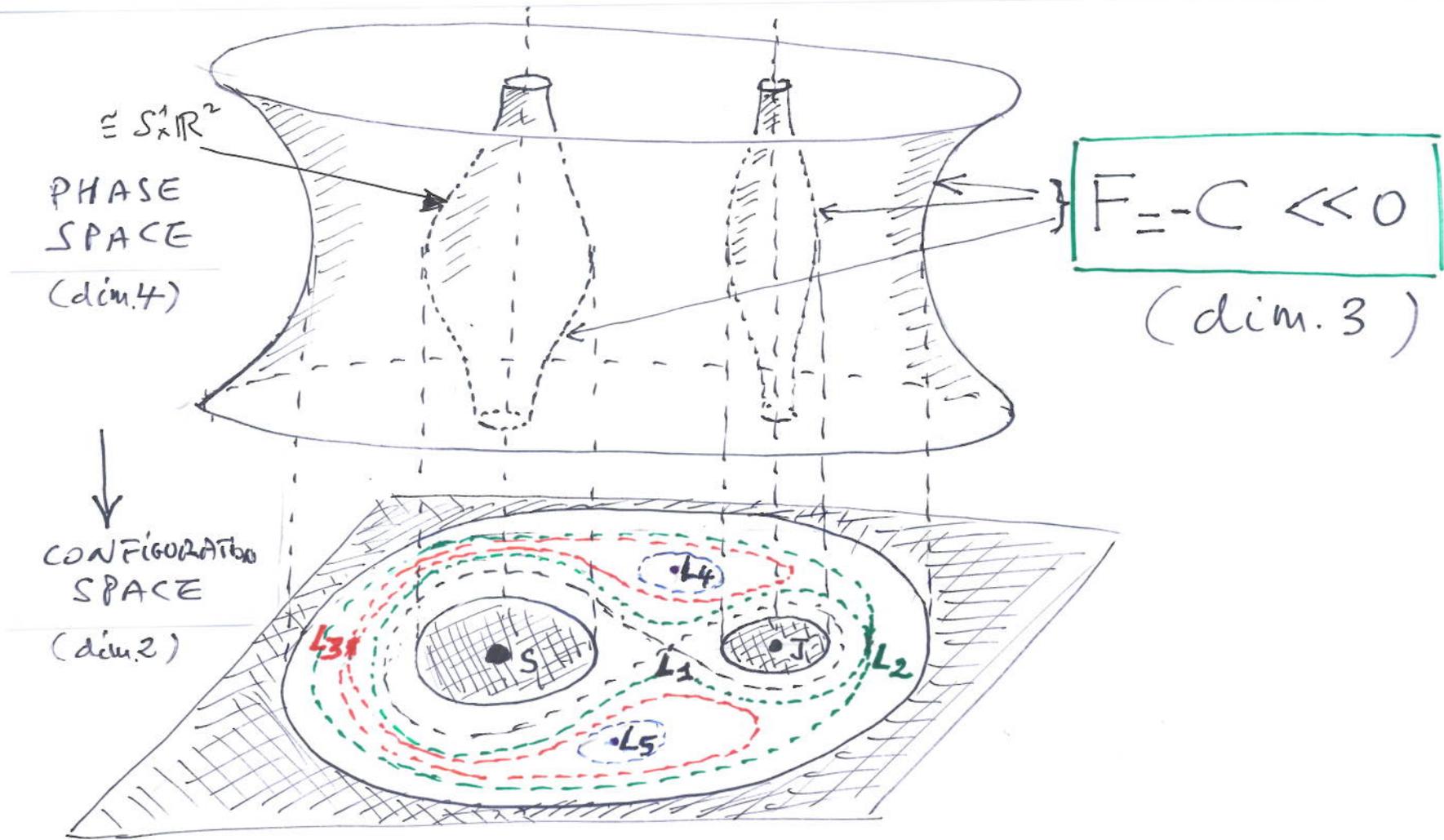
Jacobi constant

$$F = \underbrace{-\frac{1}{2L^2} - G}_{F_0(L, G)} + \mu F_1(L, G, l, g-t)$$

perturbing function

in the form of the "general problem of dynamics"

HILL REGIONS



POINCARÉ COORDINATES

{ defined and analytic } at circulars
 ($x_1=0$ or $x_2=0$)
 singular at collisions ($x_1=x_2$)

$$-C \ll 0$$

$$\frac{2}{(x_1+x_2)^2} - \frac{x_2-x_1}{2} + O(\mu)$$

$$x_1 = L - G, \quad x_2 = L + G$$

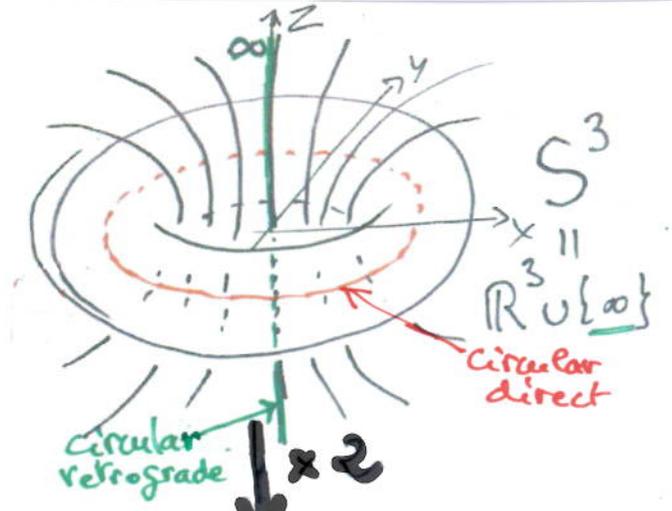
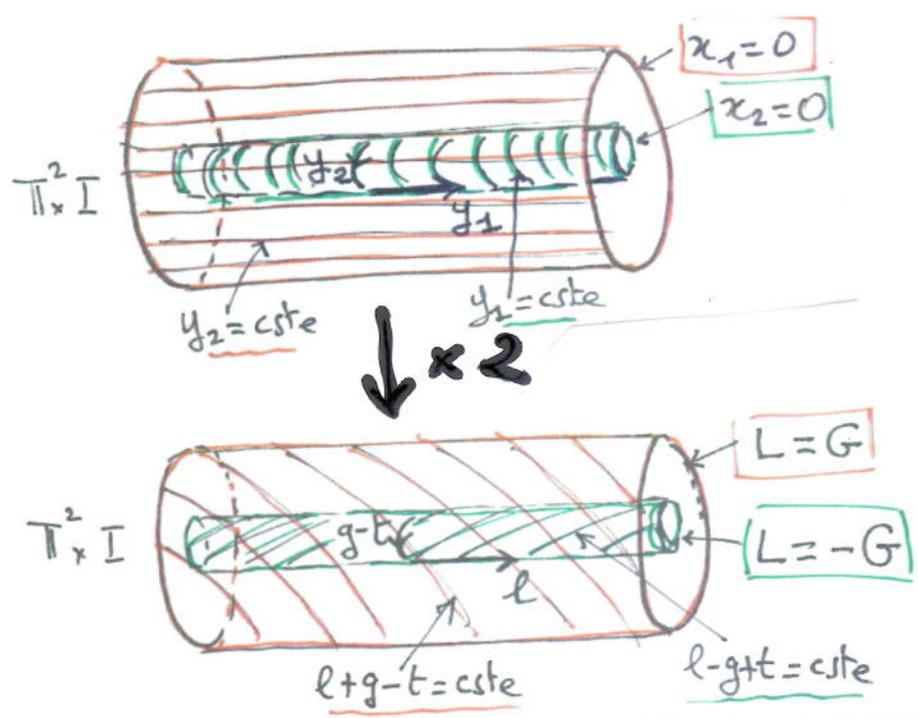
$$2y_1 = l - g + t, \quad 2y_2 = l + g - t$$

vol. III
 §§ 313
 392

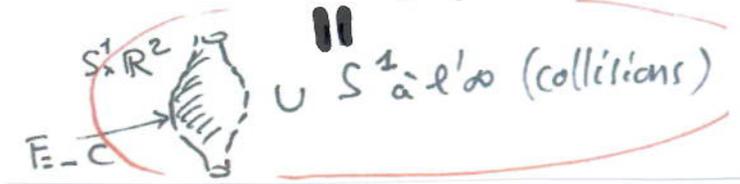
$$X = \frac{\sqrt{x_2} \cos y_2}{\sqrt{x_2+4x_1} - 2\sqrt{x_1} \cos y_1}$$

$$Y = \frac{\sqrt{x_2} \sin y_2}{\sqrt{x_2+4x_1} - 2\sqrt{x_1} \cos y_1}$$

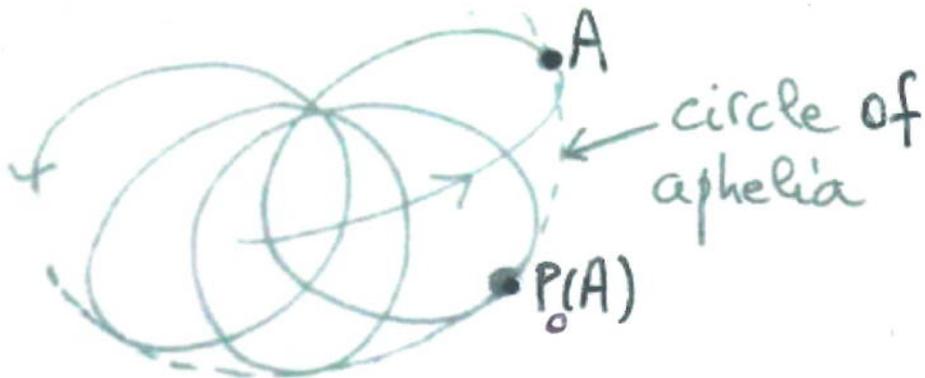
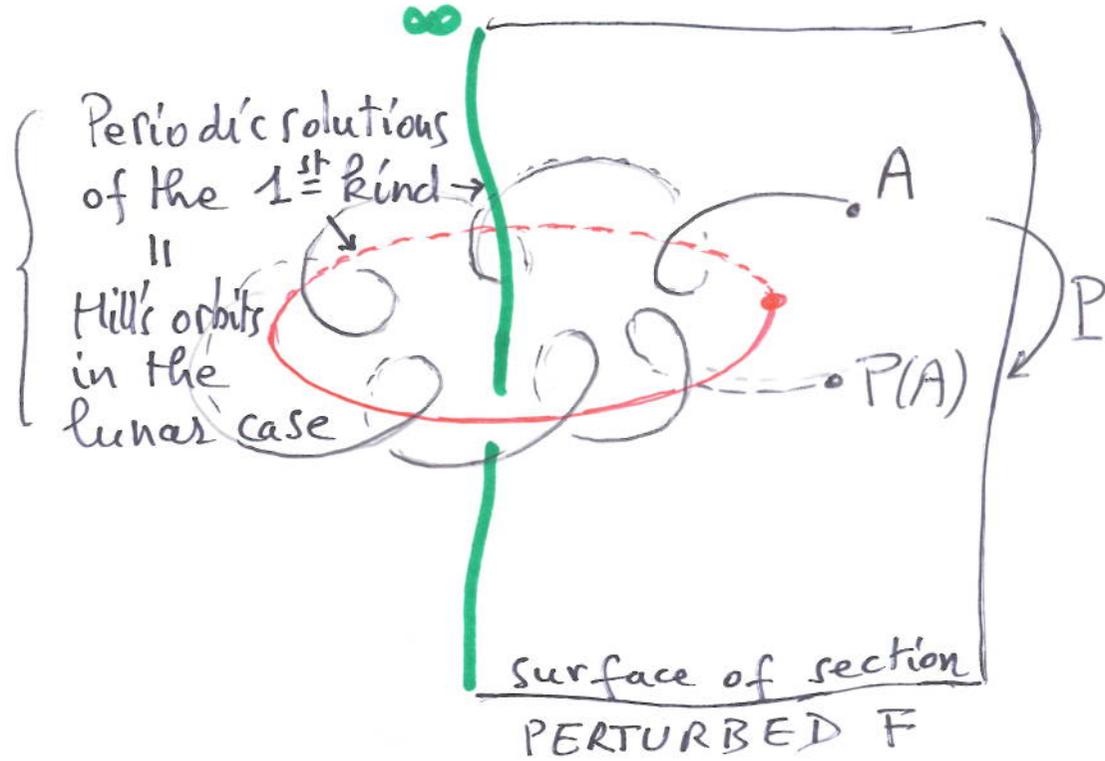
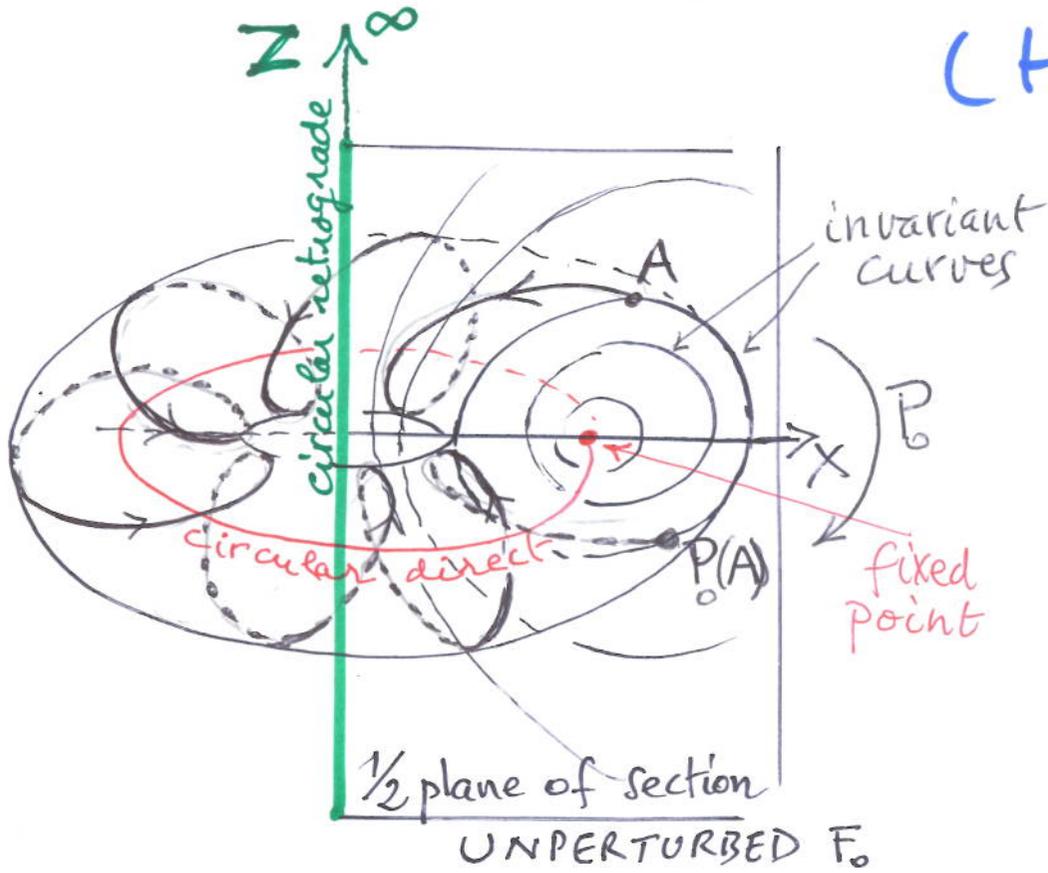
$$Z = \frac{2\sqrt{x_1} \sin y_1}{\sqrt{x_2+4x_1} - 2\sqrt{x_1} \cos y_1}$$



$$SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$$



FIRST RETURN MAP (théorie des conséquents)



2

$$F_0(L, G) = -\frac{1}{2L^2} - G$$

is degenerate (Hessian=0)

BUT

Return map is non-degenerate

because independent of time parametrization



Poincaré's trick: replace F_0 by $\exp F_0$

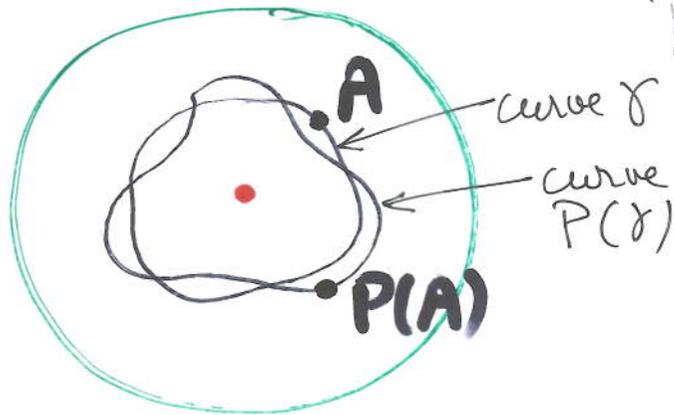
THE INTEGRAL INVARIANT

While new first integrals do not exist,
infinitesimal first integrals (= first integrals
of the variational equations) along an orbit do exist!

The first return map P preserves a smooth measure with finite total mass.

[Vol. III
Ch. XXII]

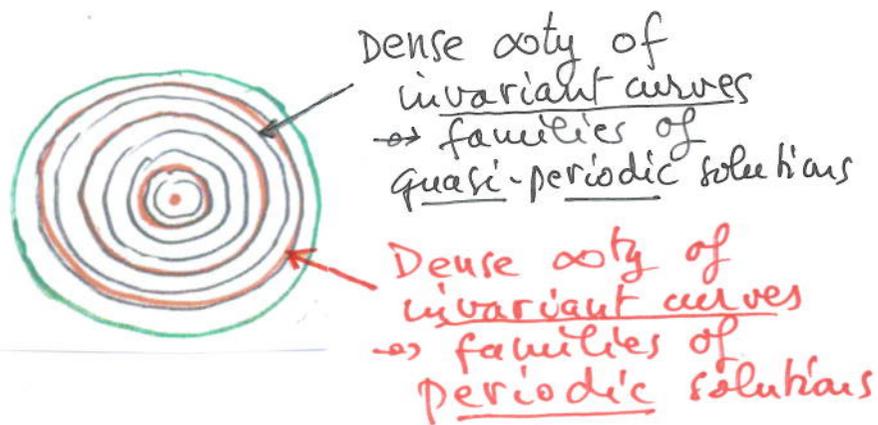
P possesses the intersection property



To-day, we say that the canonical equations preserve the symplectic structure of the phase space

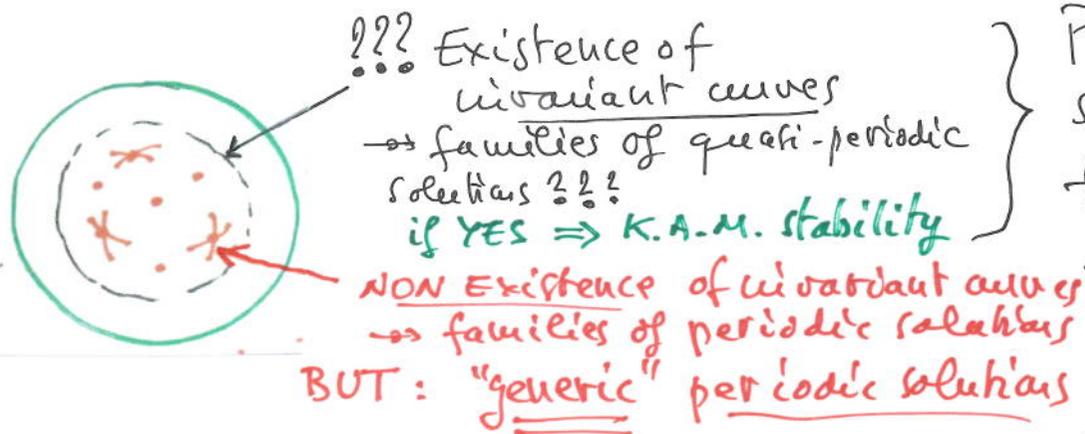
LOOKING FOR STABILITY ...

UNPERTURBED MOTION



CONVERGENCE OF
LINDSTEDT SERIES
WITH VARIABLE FREQUENCIES

PERTURBED MOTION

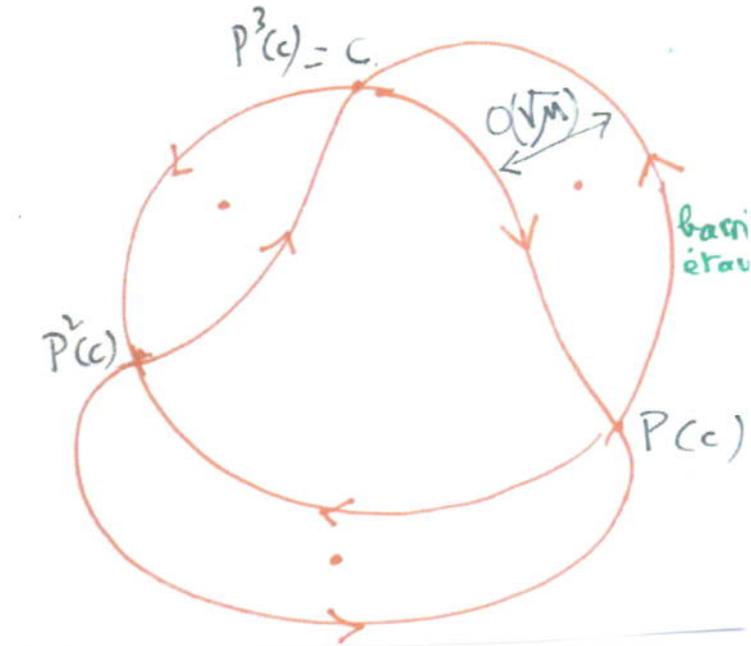


Possibility of cv of Lindstedt series with well chosen fixed frequencies ??? § 149

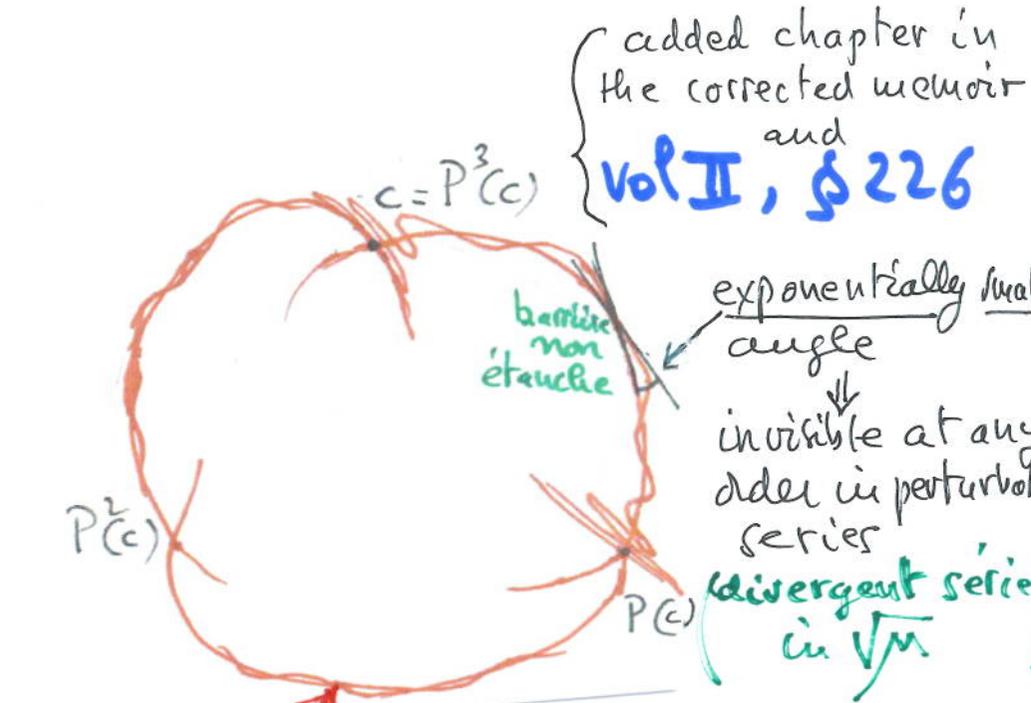
DIVERGENCE OF LINDSTEDT SERIES WITH VARIABLE FREQUENCIES

vol. II, ch. XIII

THE ERROR IN THE MEMOIR



FORMALLY INTEGRABLE
 (formal coincidence
 of $W^s(c)$ and $W^u(P(c))$)



added chapter in
 the corrected memoir
 and
vol II, § 226

exponentially small
 angle
 ↓
 invisible at any
 order in perturbation
 series
 (divergent series
 in $\sqrt{\mu}$)

... BUT NOT INTEGRABLE!

TRANSVERSE
 HOMOCLINIC
 SOLUTIONS

$$W^s(c) \not\perp W^u(P(c))$$

⇒ DIVERGENCE OF
 BOHLIN SERIES

EXPONENTIALLY SMALL ANGLES: an example

Vol. II,

225. Nous avons vu au n° 212 que les séries auxquelles conduit la méthode de M. Bohlin sont généralement divergentes et j'ai cherché à expliquer le mécanisme de cette divergence. Je crois devoir revenir sur ce sujet et étudier avec quelques détails un exemple simple qui fera mieux comprendre ce mécanisme. Soit

$$-F = p + q^2 - 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} - \mu \varepsilon \varphi(y) \cos x,$$

decoupling
 $\mu \varepsilon \ll \mu$

où $(p, x; q, y)$ sont deux paires de variables conjuguées, $\varphi(y)$ une fonction périodique de y de période 2π et où μ et ε sont deux constantes que je supposerai très petites.

Mettons en évidence les solutions particulières remarquables. Nous avons d'abord la solution simple

$$x = t, \quad p = 0, \quad y = 0, \quad q = 0,$$

qui est une *solution périodique*. Voyons quelles sont les solutions asymptotiques correspondantes.

§226

Termes in ε :

Ainsi, bien que les fonctions ψ et ψ' ne soient pas égales, leurs développements formels suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ sont identiques. C'est assez dire que ces développements ne sont pas convergents.

Cela montre toutefois que si μ est considéré comme un infiniment petit du premier ordre, la différence $\psi - \psi'$ sera un infiniment petit d'ordre infini, comme est, par exemple, $e^{-\frac{1}{\mu}}$.

Et, en effet, dans le cas particulier où $\varphi(y) = \sin y$, on a

$$0 \left(-\frac{1}{\sqrt{8\mu}} \right) = \frac{-i \sqrt{\frac{\mu}{2}}}{e^{\frac{\pi}{4\sqrt{2\mu}}} + e^{-\frac{\pi}{4\sqrt{2\mu}}}},$$

ce qui montre que les différences $\psi - \psi'$ et $S_1 - S'_1$ sont du même ordre de grandeur que

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{-\frac{\pi}{4\sqrt{2\mu}}}.$$

397. Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.

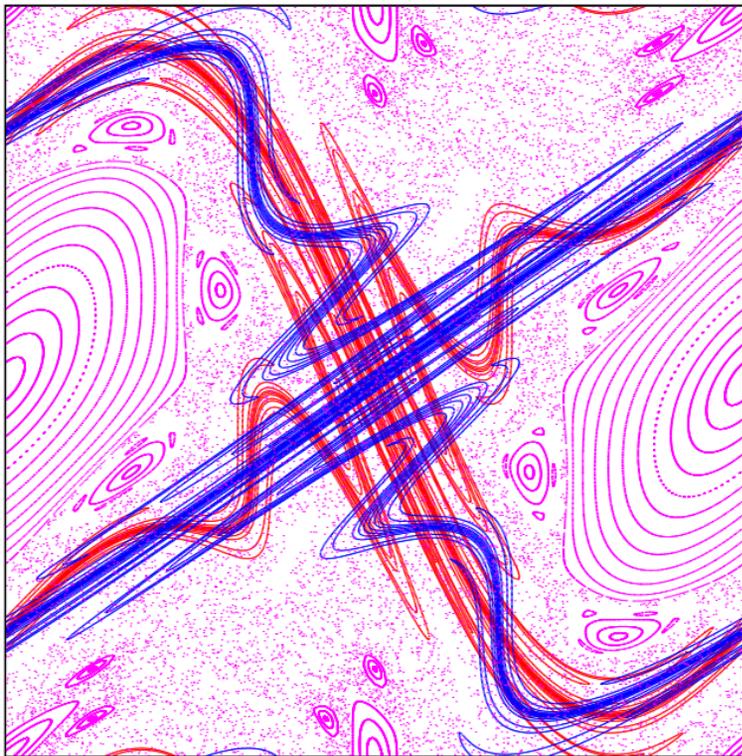


Figure : Carles Simo

THE ERSATZ OF THE LOST STABILITY:

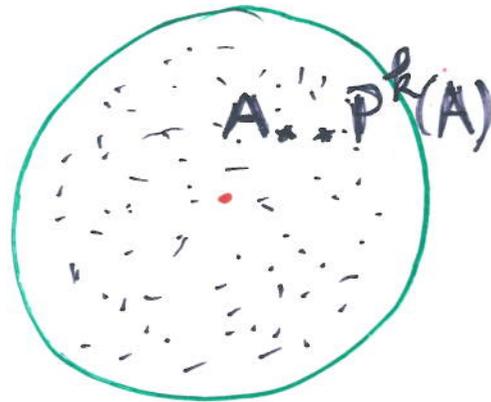
THE RECURRENCE THEOREM

Vol. III
Ch. XXVI
STABILITY
"à la Poisson"

alludes to the return of the values of the planetary semi-major axes (absence of purely secular terms when the cubes of the masses are neglected)

Vol II § 150

"Comparison with the old methods"



For almost all initial condition A , the orbit $\{P^k(A)\}_{k \in \mathbb{N}}$ comes arbitrarily close to A

Before Borel and Lebesgue,
POINCARÉ UNDERSTANDS PERFECTLY
THE ZERO MEASURE SETS !!!

The recurrence theorem is the ancestor
of ERGODIC THEORY

Mémoire corrigé

1890

Introduction

Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. Je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles.

MNMC Tome III

Ch. XXVI

Si donc Poisson a cru pouvoir répondre affirmativement à la question de la stabilité telle qu'il l'avait posée, bien qu'il eût exclu les cas où le rapport des moyens mouvements est commensurable, nous aurons de même le droit de regarder comme démontrée la stabilité telle que nous la définissons, bien que nous soyons forcés d'exclure les molécules exceptionnelles dont nous venons de parler.

RETROGRADE
HILL SOLUTION

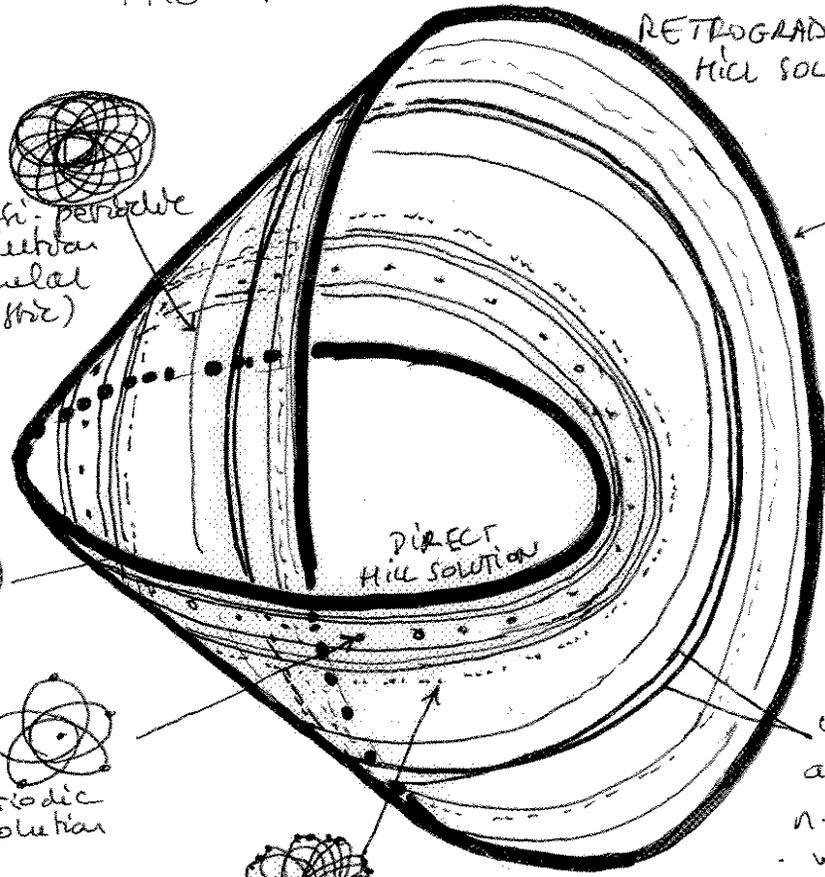
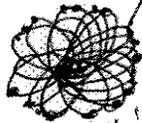
quasi-periodic
foliation
(regular
caustic)

DIRECT
HILL SOLUTION

collision curve
and its image;
nearby solutions
will scatter.

periodic
solution

quasi-periodic
foliation with
caustic

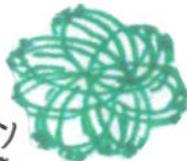


SMOOTH
CAUSTIC



INVARIANT
KAM
CURVE

III 1st SORT (HILL DIRECT)



CANTORIAN
CAUSTIC

ELLIPTIC
PERIODIC
SOLUTION



INVARIANT CANTOR
SET (HEDLUND,
AUBRY-MATHER,
WEAK KAM)

$P^2(c)$

$b = P^2(b)$

$c = P^2(c)$

COLLISIONS

XVIII to XXXI

2nd SORT
PERIODIC
SOLUTIONS
(STABLE-INS-
TABLE PAIR)

1st SORT (Hill version)

COLLISIONS

$P^2(b)$

XXXIII

DOUBLY
ASYMPTOTIC
SOLUTIONS
§ 397

HYPERBOLIC
PERIODIC
SOLUTION

XXI § 226

EXPONENTIALLY
SMALL ANGLE
(\Rightarrow ERROR IN THE
FIRST VERSION OF THE
MEMOIR IN 1889)

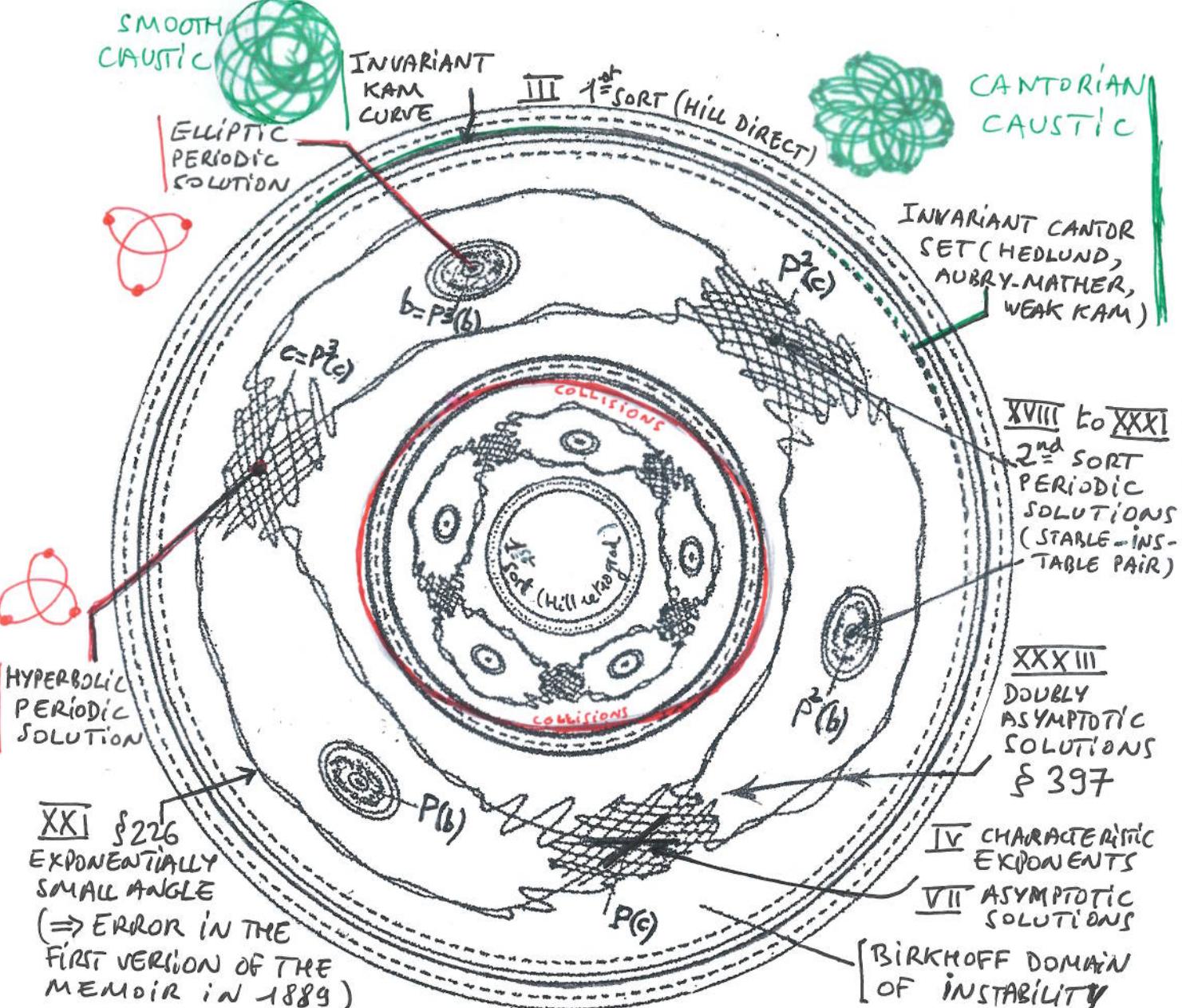
$P(b)$

IV CHARACTERISTIC
EXPONENTS

VII ASYMPTOTIC
SOLUTIONS

$P(c)$

[BIRKHOFF DOMAIN
OF INSTABILITY



WHY STUDY THE THREE-BODY PROBLEM ?

G. DARBOUX'S ANSWER

(December 15, 1913)

Poincaré ne pouvait pas ne pas avoir conscience de la haute valeur de ses écrits; d'autres auraient réclamé des récompenses, lui ne demandait rien. Nous le regardions tous comme le plus fort d'entre nous. Il n'a jamais cherché à nous devancer. Nul ne pouvait prévoir les vides nombreux que la mort allait faire dans la section de Géométrie. Pour le faire arriver plus vite, pour lui ménager une place dans la section d'Astronomie, on lui signalait les applications que les théories par lui découvertes pouvaient avoir en Mécanique céleste. Il suivait docilement ces indications, s'occupait du problème des trois corps, des figures des corps célestes, et trouvait tout naturel de laisser passer devant lui tous les anciens.¹⁶⁹

¹⁶⁹Poincaré could not be unaware of the high value of his writings; others would have claimed awards, he asked nothing. We all considered him as the strongest of us all. He never attempted overtaking us. No one could foresee the many gaps that death would cause in the Geometry section. In order to make him arrive faster, to secure for him a seat in the Astronomy section, we pointed to him the applications that the theories he had discovered could have in Celestial Mechanics. He was obediently following these indications, handling the Three-Body Problem, the figures of celestial bodies, and finding it quite natural to let pass before him the elders.



SCHOLARPEDIA
the peer-reviewed
open-access encyclopedia

- Main page
- Propose a new article
- About
- Random article
- Help
- F.A.Q.'s
- Blog

- Focal areas
 - Astrophysics
 - Computational neuroscience
 - Computational intelligence
 - Dynamical systems
 - Physics
 - Touch

- Activity
- Toolbox



Announcing the 2012 Brain Corporation Prize in Computational Neuroscience

Three body problem

+1 Recommend this on Google

Alain Chenciner (2007), Scholarpedia, 2(10):2111.

doi:10.4249/scholarpedia.2111

revision #126938 [link to/cite this article]

— Alain Chenciner, Math Dept Paris 7 University and IMCCE (Paris Observatory), France

The problem is to determine the possible motions of three point masses m_1 , m_2 , and m_3 , which attract each other according to Newton's law of inverse squares. It started with the perturbative studies of Newton himself on the *inequalities* of the lunar motion[1]. In the 1740s it was constituted as the search for solutions (or at least approximate solutions) of a system of ordinary differential equations by the works of Euler, Clairaut and d'Alembert (with in particular the explanation by Clairaut of the motion of the lunar apogee). Much developed by Lagrange, Laplace and their followers, the mathematical theory entered a new era at the end of the 19th century with the works of Poincaré and since the 1950's with the development of computers. While the two-body problem is integrable and its solutions completely understood (see [2],[AKN],[AI],[BP]), solutions of the **three-body problem** may be of an arbitrary complexity and are very far from being completely understood.

Contents [hide]

- Equations
- Symmetries, first integrals
- Homographic solutions
- The astronomer's three-body problem: i) the planetary problem
 - Reduction to the general problem of dynamics
 - The secular system
 - From Lindstedt series to K.A.M.
- The astronomer's three-body problem: ii) a caricature of the lunar problem
 - The planar circular restricted problem:
 - The simplest case:
 - Poincaré's first return map
 - Higher values of the Jacobi constant
- Periodic solutions
 - Poincaré's classification
 - Numerical exploration
 - Stability, exponents, invariant manifolds
 - Minimizing the action
- Global evolution
 - Lagrange-Jacobi and Sundman
 - The shape sphere
 - Collisions
 - Final motions
 - The oldest open question in dynamical systems
- Non-integrability
 - Bruno, Painlevé
 - Poincaré
 - Ziglin, Morales-Ramis
 - Two cases of integrability
- Still simpler than the 4-(and more)-body problem!
- Acknowledgments
- References
- See also

ADVERTISING

Ce qui limite le vrai,
ce n'est pas le faux,
c'est l'insignifiant

René Thom

in "Prédire n'est pas expliquer"
Esprit, Paris 1991, p. 132

[What limits the true,
it is not the false,
it is the insignificant]