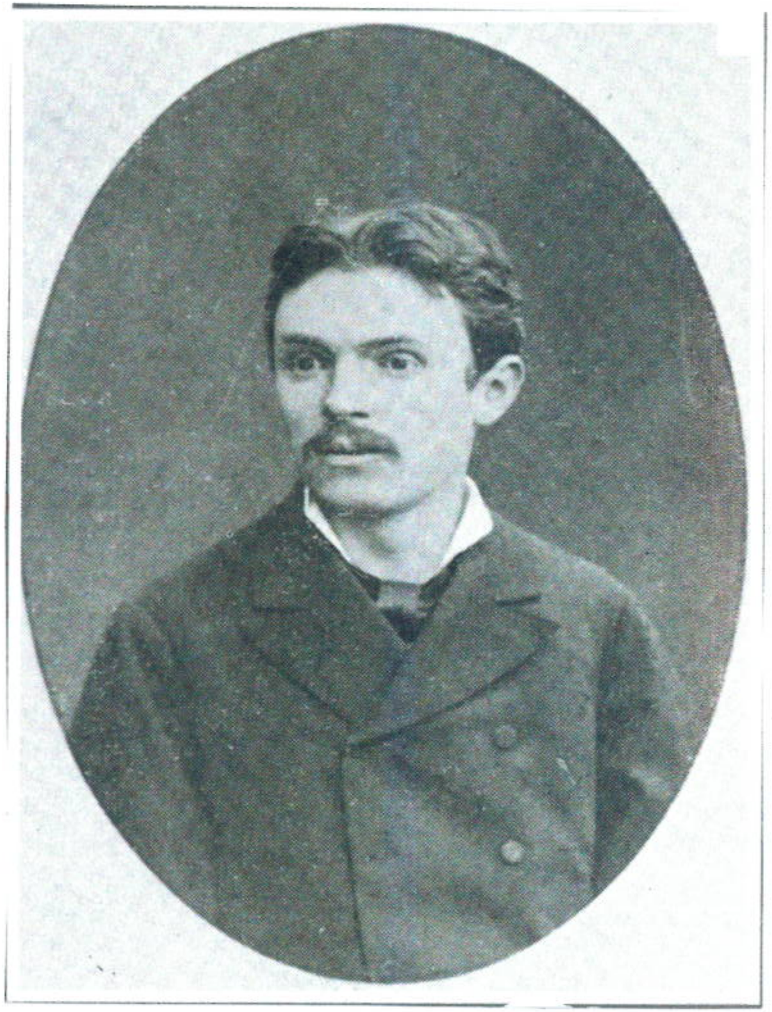

POINCARÉ
&
LE PROBLÈME DES TROIS CORPS
ALAIN CHENCINER, IMCCE & UNIV. PARIS 7
H. POINCARÉ
MÉTHODES NOUVELLES
DE MÉCANIQUE
CÉLESTE
H. POINCARÉ
CÉLESTE
H. POINCARÉ
MÉTHODES NOUVELLES
CÉLESTE
POINCARÉ



1881

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES DÉFINIES

PAR

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Journal de Mathématiques, 3e série, t. 7, p. 375-422 (1881) et t. 8, p. 251-296 (1882).

. . . .

D'ailleurs, cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons pour exemple le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux des corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de Géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites ?

Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres. Je n'ai pas eu la prétention de le parcourir tout entier, mais j'ai voulu du moins en franchir les frontières, et je me suis restreint à un cas très particulier, celui qui se présente d'abord tout naturellement, c'est-à-dire à l'étude des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.

1885

SUR LES COURBES DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. 1, p. 167-244 (1885).

. . . .

CHAPITRE X.

STABILITÉ ET INSTABILITÉ.

On n'a pu lire les deux premières Parties de ce Mémoire sans être frappé de la ressemblance que présentent les diverses questions qui y sont traitées avec le grand problème astronomique de la stabilité du système solaire. Ce dernier problème est, bien entendu, beaucoup plus compliqué, puisque les équations différentielles du mouvement des corps célestes sont d'ordre très élevé. Il y a même plus, on rencontrera, dans ce problème, une difficulté nouvelle, essentiellement différente de celles que nous avons eu à surmonter dans l'étude du premier ordre, et j'ai l'intention de la faire ressortir, sinon dans cette troisième Partie, du moins dans la suite de ce travail.

FIRST APPEARANCE OF THE MAIN ACTORS:

PERIODIC SOLUTIONS ....

1883

SUR CERTAINES SOLUTIONS PARTICULIÈRES DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 97, p. 251-252 (23 juillet 1883).

M. Kronecker a présenté à l'Académie de Berlin, en 1869, un Mémoire sur les fonctions de plusieurs variables; on y trouve un important théorème d'où il est aisé de déduire le résultat suivant :

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ n fonctions continues de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; la variable x_i est assujettie à varier entre les limites $+a_i$ et $-a_i$. Supposons que, pour $x_i = a_i$, ξ_i soit constamment positif, et pour $x_i = -a_i$ constamment négatif; je dis qu'il existera un système de valeurs des x pour lequel tous les ξ s'annuleront.

Ce résultat peut s'appliquer au problème des trois corps et montre que ce problème admet une infinité de solutions particulières jouissant de propriétés remarquables que nous allons exposer. Nous nous restreignons, bien entendu, au cas où les masses de deux des corps sont très petites.

Le mouvement est périodique, c'est-à-dire que, lorsque le temps augmente d'une période constante, les trois corps reprennent la même position *relative*. A la fin d'une période, les distances des trois corps reprennent leur valeur initiale, ainsi que les vitesses relatives estimées soit dans la direction du rayon vecteur, soit dans la direction perpendiculaire. Le système entier a seulement tourné d'un certain angle autour du centre de gravité, supposé fixe.

Les excentricités sont très petites et de l'ordre des masses; mais les inclinaisons peuvent avoir des valeurs quelconques.

AND THE

LAST ONE

1912

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 33, p. 375-407 (1912).

§ 1. **Introduction.**

Je n'ai jamais présenté au public un travail aussi inachevé; je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques mots les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai démontré, il y a longtemps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.

J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. J'ai été obligé d'envisager séparément un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que j'aie pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème dans tous ceux que j'ai traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration générale, soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défaut.

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS ET LES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ
À PARIS.

MÉMOIRE COURONNÉ
DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II
LE 21 JANVIER 1889.

AVEC DES NOTES
PAR L'AUTEUR.

INTRODUCTION OF THE MEMOIR (1889)
(NON CORRECTED VERSION)

En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant:

Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Dans ce cas particulier, j'ai démontré rigoureusement la stabilité, non seulement en montrant que le rayon vecteur de la petite planète ne peut croitre indéfiniment, mais en lui fixant sinon ses limites précises, au moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

TABLE OF CONTENTS OF THE MEMOIR (NON CORRECTED VERSION 1889)

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPTER ADDED IN THE CORRECTED VERSION OF 1890

Deuxième partie.

1892

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME I.

Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes.
Solutions asymptotiques.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

CHAPITRE III.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES.

CHAPITRE IV.

EXPOSANTS CARACTÉRISTIQUES.

CHAPITRE V.

NON-EXISTENCE DES INTÉGRALES UNIFORMES.

CHAPITRE VI.

DÉVELOPPEMENT APPROCHÉ DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

CHAPITRE VII.

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

16293 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

1893

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME II.

Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55

1893

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DEUXIÈME.

CHAPITRE VIII.

CALCUL FORMEL.

CHAPITRE IX.

MÉTHODES DE MM. NEWCOMB ET LINDSTEDT.

CHAPITRE X.

APPLICATION A L'ÉTUDE DES VARIATIONS SÉCULAIRES.

CHAPITRE XI.

APPLICATION AU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

CHAPITRE XII.

APPLICATION AUX ORBITES PEU EXCENTRIQUES.

CHAPITRE XIII.

DIVERGENCE DES SÉRIES DE M. LINDSTEDT.

CHAPITRE XIV.

CALCUL DIRECT DES SÉRIES.

CHAPITRE XV.

AUTRES PROCÉDÉS DE CALCUL DIRECT.

CHAPITRE XVI.

MÉTHODES DE M. GYLDÉN.

CHAPITRE XVII.

CAS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

CHAPITRE XVIII.

CAS DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

CHAPITRE XIX.

MÉTHODES DE M. BOHLIN.

CHAPITRE XX.

SÉRIES DE M. BOHLIN.

CHAPITRE XXI.

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE M. BOHLIN

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME DEUXIÈME.

1899

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

TOME III.

Invariants intégraux. — Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TROISIÈME.

CHAPITRE XXII.

INVARIANTS INTÉGRAUX.

CHAPITRE XXIII.

FORMATION DES INVARIANTS.

CHAPITRE XXIV.

USAGE DES INVARIANTS INTÉGRAUX.

CHAPITRE XXV.

INVARIANTS INTÉGRAUX ET SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES.

CHAPITRE XXVI.

STABILITÉ A LA POISSON.

CHAPITRE XXVII.

THÉORIE DES CONSÉQUENTS.

CHAPITRE XXVIII.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU DEUXIÈME GENRE.

CHAPITRE XXIX.

DIVERSES FORMES DU PRINCIPE DE MOINDRE ACTION.

CHAPITRE XXX.

FORMATION DES SOLUTIONS DU DEUXIÈME GENRE.

CHAPITRE XXXI.

PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS DU DEUXIÈME GENRE.

CHAPITRE XXXII.

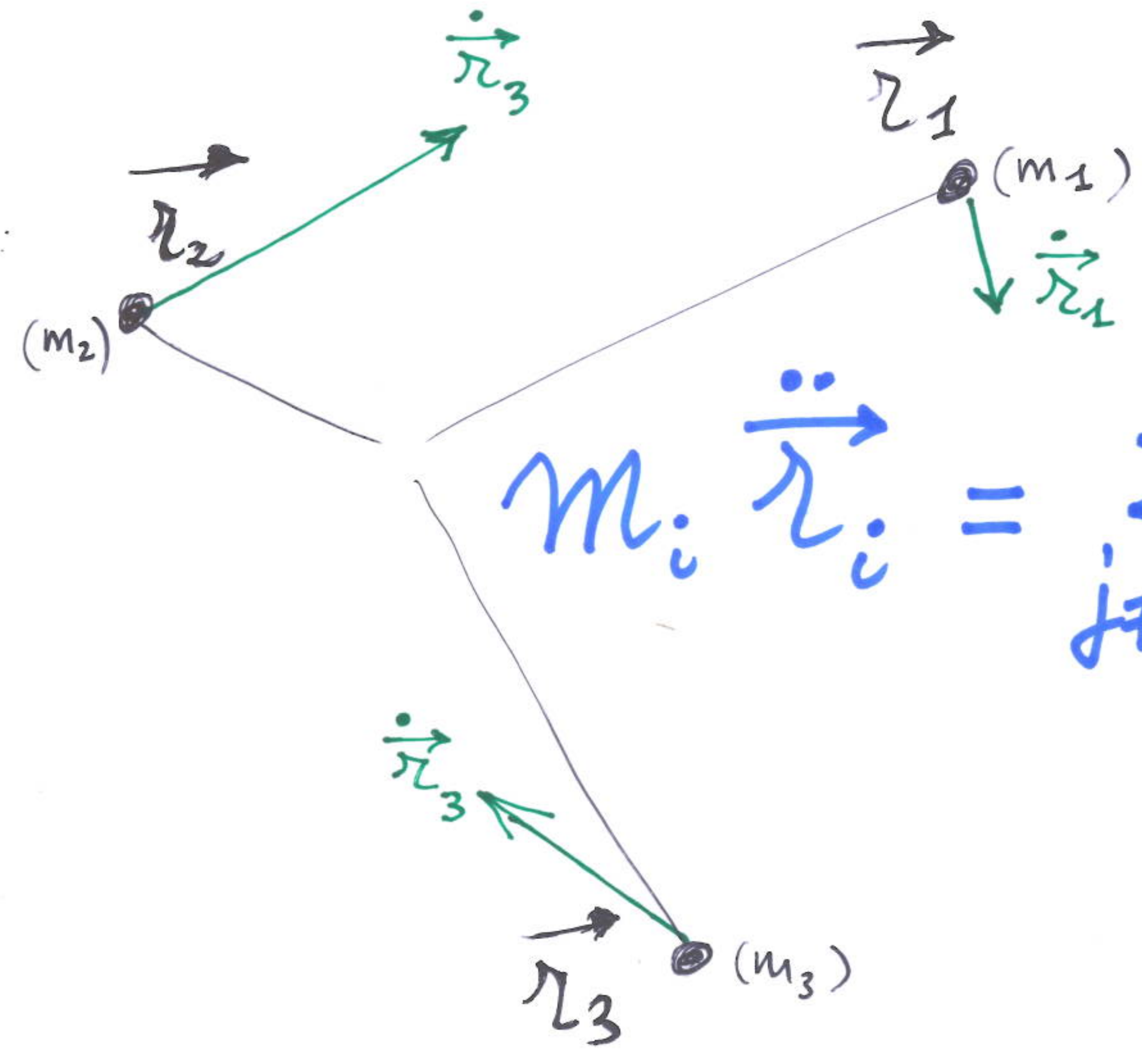
SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUXIÈME ESPÈCE.

CHAPITRE XXXIII.

SOLUTIONS DOUBLEMENT ASYMPTOTIQUES.

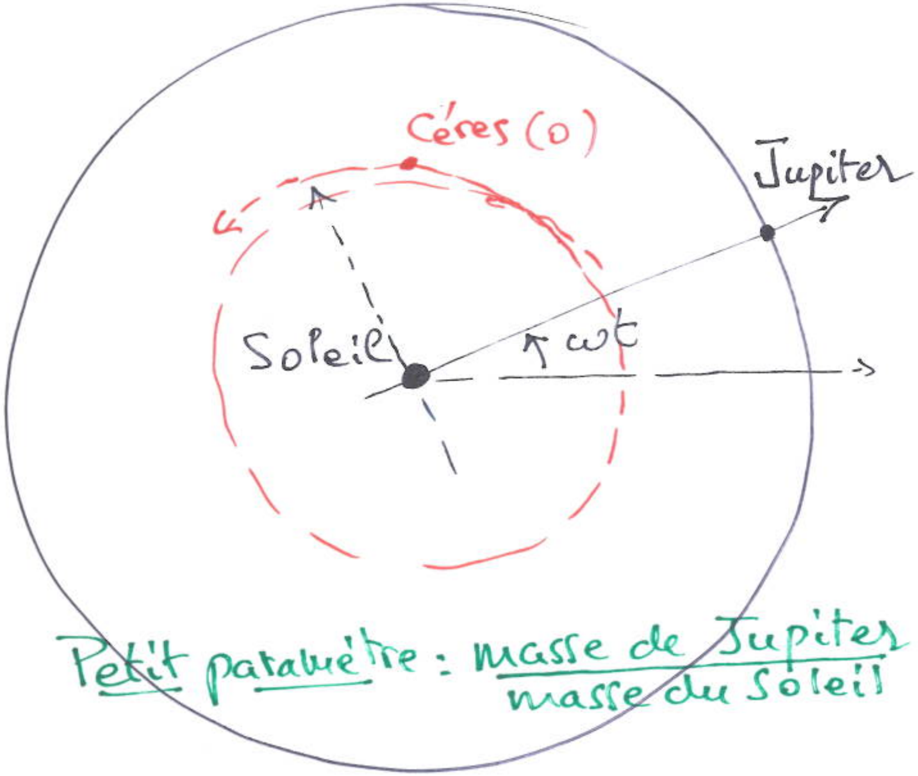
FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME TROISIÈME ET DERNIER.

THE THREE-BODY PROBLEM

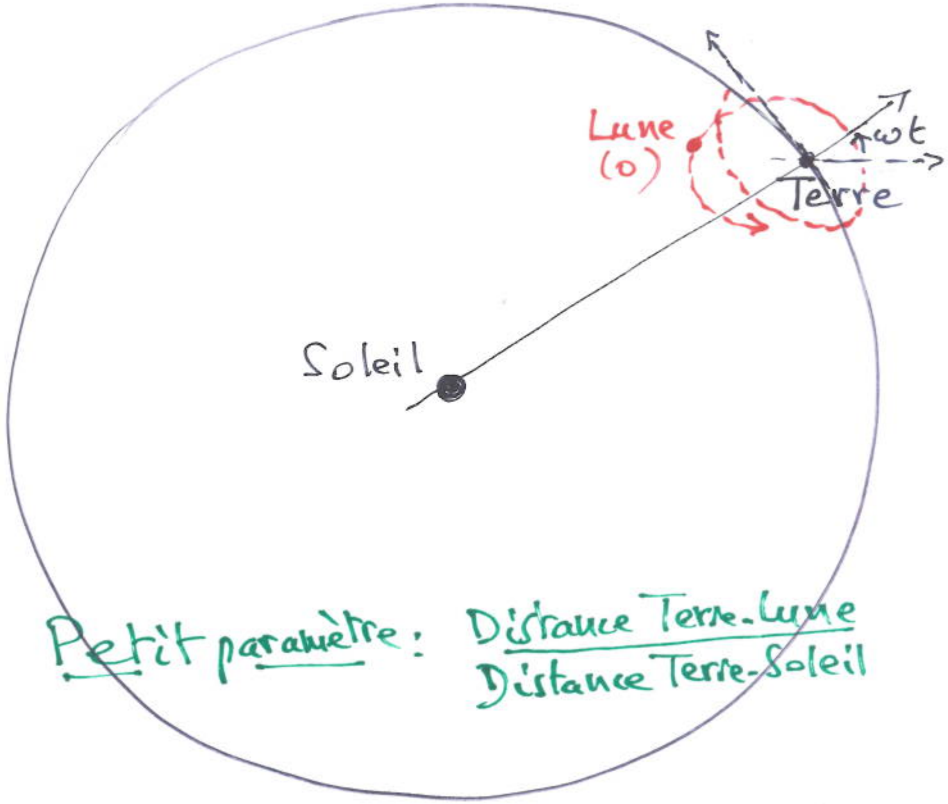


$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\| \vec{r}_j - \vec{r}_i \|^3}$$

THE PLANAR CIRCULAR RESTRICTED PROBLEM



Petit paramètre : $\dfrac{\text{masse de Jupiter}}{\text{masse du Soleil}}$



Petit paramètre : $\dfrac{\text{Distance Terre-Lune}}{\text{Distance Terre-Soleil}}$

PLANETARY CASE

LUNAR CASE

DIMENSIONS

	3 corps dans $\mathbb{R}^3$	3 corps dans $\mathbb{R}^2$	Problème restreint (circulaire plan)
Coordonnées de position	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 2 = 6$	2
Coordonnées de vitesse	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 2 = 6$	2
Réduction des translations	-6	-4	
Réduction des rotations	$-3-1$	$-1-1$	$+1-1$
Fixation de l'énergie	-1	-1	-1
	7	5	3

repère tournant

$\downarrow$ surface de section

2

MNMC Tome I §13

Problème général de la Dynamique.

13. Nous sommes donc conduit à nous proposer le problème suivant :

Étudier les équations canoniques

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

en supposant que la fonction F peut se développer suivant les puissances d'un paramètre très petit μ de la manière suivante :

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots,$$

en supposant de plus que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y ; et que F_1, F_2, ... sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport aux y.

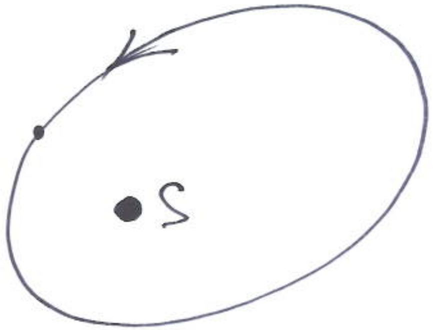
2 PROBLEMS

(NON) - INTEGRABILITY
(IN) - STABILITY

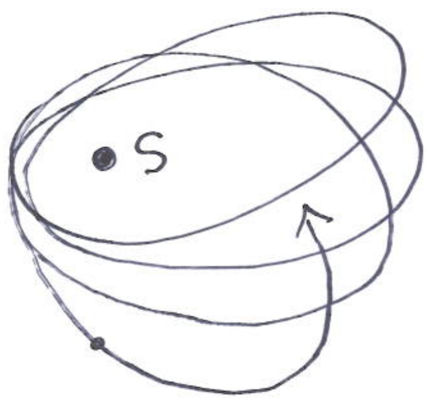
RESTRICTED PROBLEM

(Poincaré studies the planetary case)

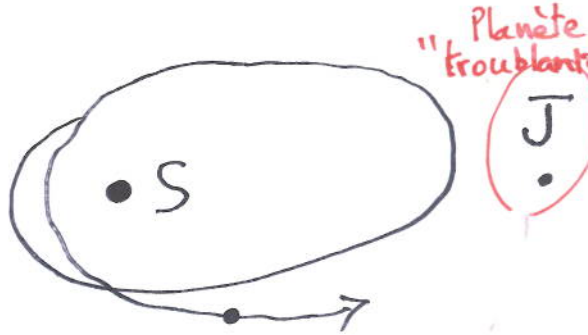
Problème "non troublé" (ellipses de Kepler)



Problème "non troublé" en repère tournant (ellipses avec précession)



Problème restreint en repère tournant



PÉRIODIQUE QUASI-PÉRIODIQUE

$\mu=0$, INTÉGRABLE, STABLE

?

$\mu \neq 0$

THE KEY : PERIODIC SOLUTIONS

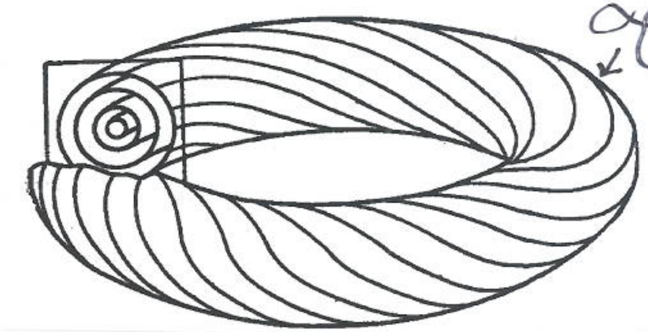
MNMC Tome I § 36

Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.

Étant données des équations de la forme définie dans le n° 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.

WHY ? BREAKING OF RESONANT TORI
$\Downarrow$
GENERIC PERIODIC SOLUTIONS

Hamiltonian $F_0(x)$
completely integrable
$\Downarrow$
highly NON GENERIC



from ARNOLD 1963

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F_0}{\partial y} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial x} = (\omega_1, \omega_2, \dots)$$

frequencies

Perturbed Hamiltonian
$$F(x,y) = F_0(x) + \mu F_1(x,y)$$

if $\boxed{\text{non resonant}}$, $\mathcal{C}_0$ = closure of one solution

$\Downarrow$

$\boxed{\text{DYNAMICALLY DEFINED}}$

$\Downarrow$

MAY RESIST OR NOT TO PERTURBATION
(vol II, § 149, ... KAM)

if $\boxed{\text{completely resonant}}$

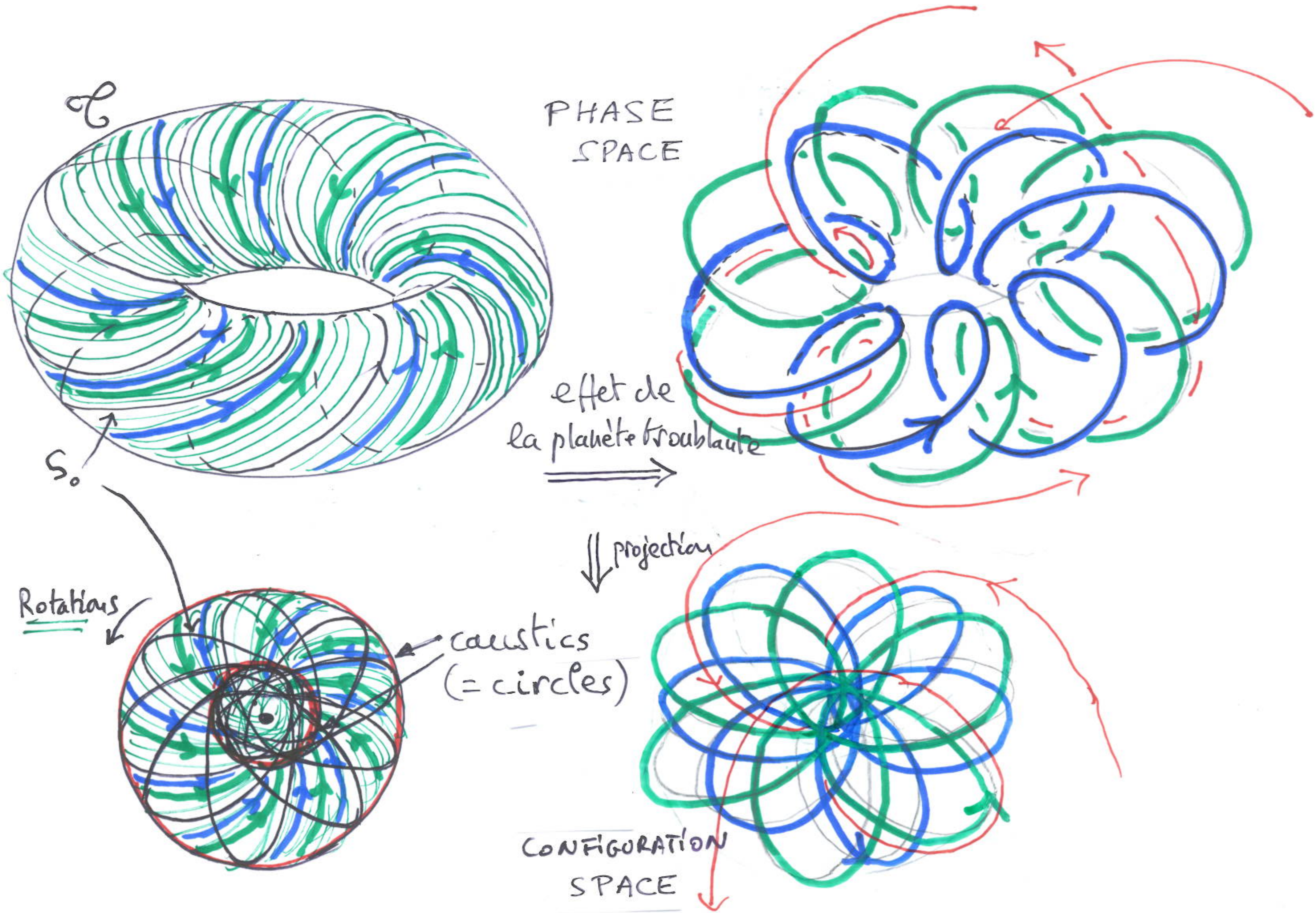
$\mathcal{C}_0$ = mere union of periodic solutio

$\Downarrow$

$\boxed{\text{NOT DYNAMICALLY DEFINED}}$

$\Downarrow$

should BREAK into FINITE # of GENERIC PERIODIC SOLUTIONS
(Vol I exponents Ch. IV)


𝒞
PHASE SPACE
effet de la planète troublante
S_0
projection
Rotations
caustics
(= circles)
CONFIGURATION SPACE

THE CONSEQUENCE OF THE EXISTENCE OF "GENERIC" PERIODIC SOLUTIONS:

NON - INTEGRABILITY

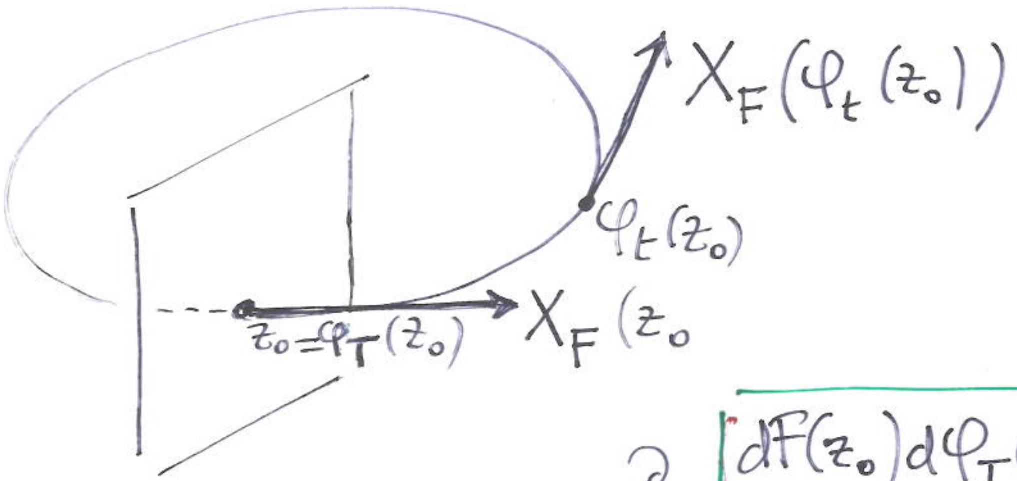
Vol. I
Ch. V & VI

Fourier coefficient of the perturbing function.

Nous devons donc conclure que, dans ce cas particulier du problème des trois Corps, il n'y a pas d'intégrale uniforme distincte de F.

Dans mon Mémoire des *Acta mathematica* (t. XIII), je me suis servi pour établir le même point de l'existence des solutions périodiques et du fait que les exposants caractéristiques ne sont pas nuls. La démonstration que je donne ici ne diffère de celle des *Acta* que par la forme, mais elle se prête mieux à la généralisation qui va suivre.

THE PROOF IN THE MEMOIR



$$\varphi_T \circ \varphi_t(z_0) = \varphi_t(z_0)$$

$$\downarrow \partial/\partial t$$

$$\boxed{d\varphi_T(z_0)\, X_F(z_0) = X_F(z_0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} F(\varphi_t(z_0)) = F(z_0) \\ \Phi(\varphi_t(z_0)) = \Phi(z_0) \end{array}\right\}$$

$\frac{\partial}{\partial z_0}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} dF(z_0)\, d\varphi_T(z_0) = dF(z_0) \\ d\Phi(z_0)\, d\varphi_T(z_0) = d\Phi(z_0) \end{array}}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} dF(z_0)\, X_F(z_0) = 0 \\ d\Phi(z_0)\, X_F(z_0) = 0 \end{array}}$$

Exercise : $\Longrightarrow$ either $dF(z_0)$ and $d\Phi(z_0)$ dependent

or Monodromy $d\varphi_T(z_0)$ has ≥ 3 exponents $= 0$

$\Downarrow$

non-generic

- End of the proof :

$\exists$ of per. sol. which are generic for $\mu \neq 0$ (not uniform in μ!) $\xrightarrow{\mu = 0}$ unperturbed per. sol. which are dense

THE CONSEQUENCE OF THE EXISTENCE OF "GENERIC" PERIODIC SOLUTIONS (2):

DIVERGENCE OF LINDSTEDT SERIES WITH VARIABLE FREQUENCIES

$$\begin{cases} x = x^0 + \mu\,\Phi_1(w) + \mu^2\,\Phi_2(w) + \cdots \\ y = w + \mu\,\varphi_1(w) + \mu^2\,\varphi_2(w) + \cdots \\ w = (w_1, \dots, w_n)\,, \quad w_i(t) = \bar{w}_i(\mu) + \underbrace{n_i(\mu)}_{\text{frequencies}}\,t \end{cases}$$

end of § 148

Il en résulte que les $2n$ exposants caractéristiques sont nuls. Or nous savons qu'il n'en est pas ainsi en général.

Donc, en général, les séries (2) ne convergeront pas uniformément quand μ et les x_i^0 varieront dans un certain intervalle.

C. Q. F. D.

THE END OF § 149 CONTEMPLATING THE POSSIBILITY OF K.A.M.

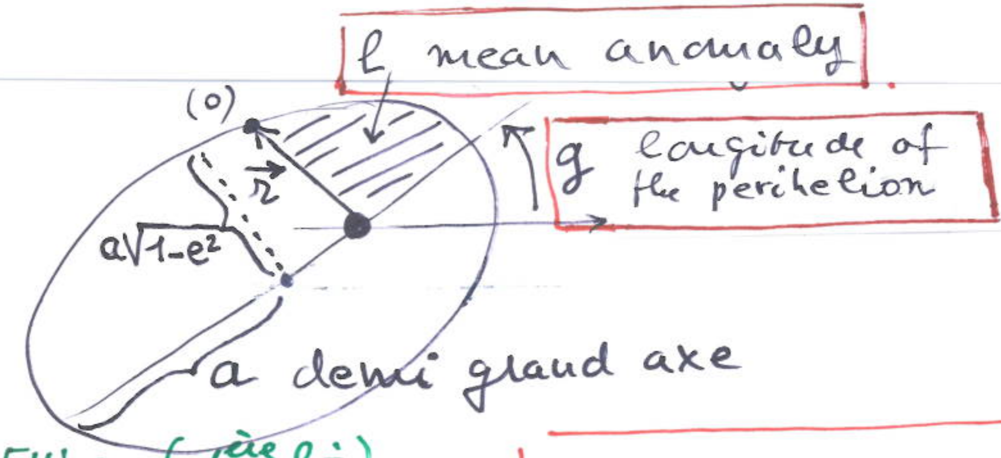
Ne peut-il pas arriver que les séries (2) convergènt quand on donne aux x_i^0 certaines valeurs convenablement choisies ?

Supposons, pour simplifier, qu'il y ait deux degrés de liberté; les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est assujetti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ?

Les raisonnements de ce Chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable.

DELAUNAY VARIABLES (L, G, ℓ, g)

Action-angle variables of the unperturbed motion of the 0-mass body around
- the SUN in the planetary case
- the EARTH in the lunar case



Ellipse (1ère loi)

$$\ddot{\vec{r}} = - \frac{M \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

$$F_K = \frac{\|\dot{\vec{r}}\|^2}{2} - \frac{M}{\|\vec{r}\|} = -\frac{M^2}{2L^2} < 0$$

$$\boxed{L = \sqrt{Ma}\ , \quad G = \pm\sqrt{Ma(1-e^2)}}$$

(moment cinétique normalisé)

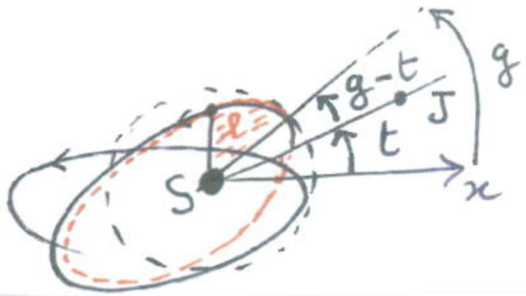
$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = -\dfrac{\partial F_K}{\partial \ell} = 0\ , & \dfrac{d\ell}{dt} = \dfrac{\partial F_K}{\partial L} = \dfrac{M^2}{L^3} \ (= n) \\ \dfrac{dG}{dt} = -\dfrac{\partial F_K}{\partial g} = 0\ , & \dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\partial F_K}{\partial G} = 0 \end{cases}$$

2ème loi

$$\boxed{n^2 a^3 = M}$$

3ème loi

KEPLER PROBLEM IN ROTATING FRAME



$$F_0 = -\frac{1}{2L^2} - G$$

Z NOT ADAPTED TO SOLUTIONS: CIRCULAR, COLLISION

L, ℓ quick variables

G, g slow (= secular) variables

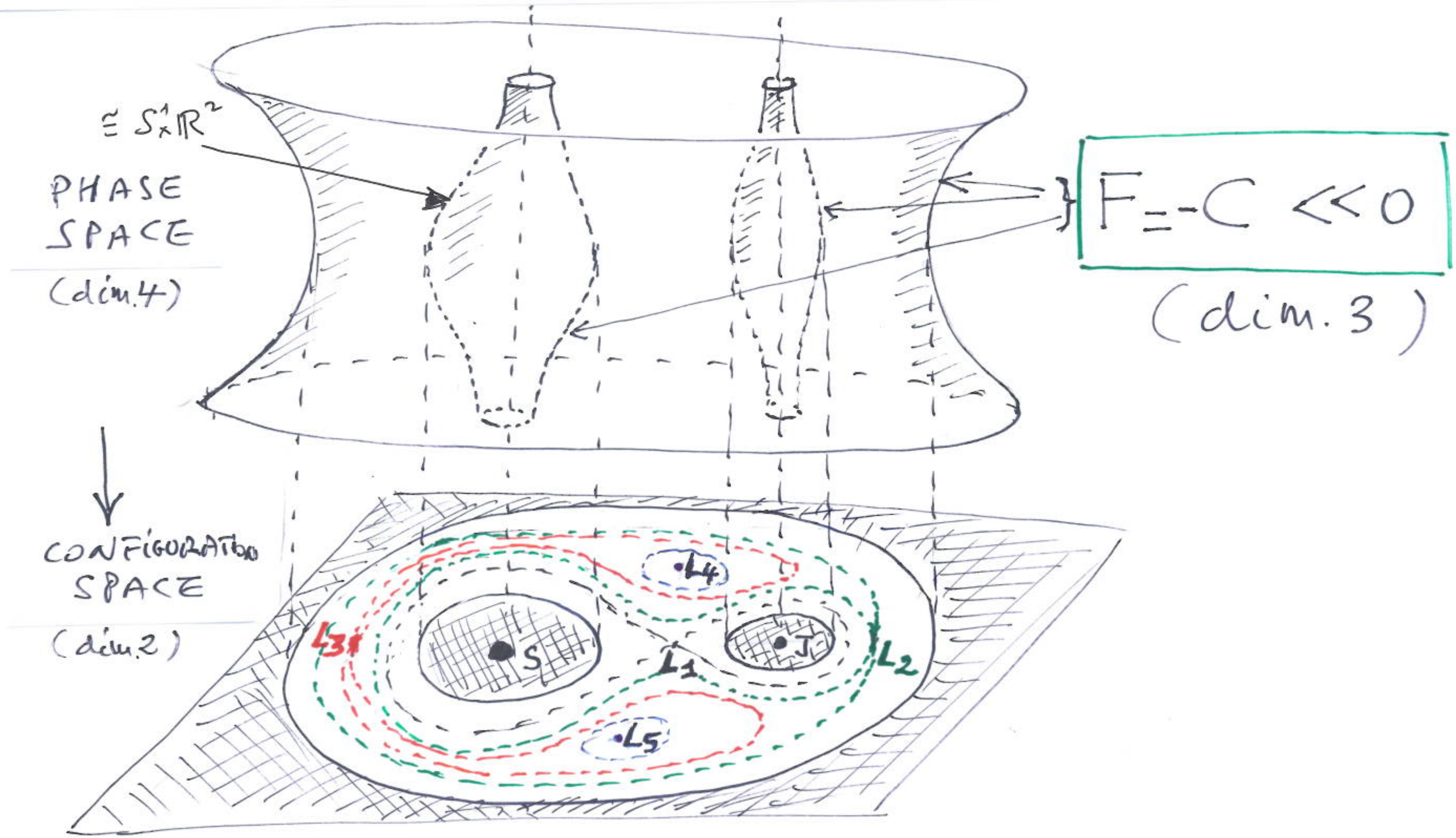
PLANAR CIRCULAR RESTRICTED PROBLEM

Jacobi constant

$$\boxed{F = \underbrace{-\frac{1}{2L^2} - G}_{F_0(L,G)} + \mu \underbrace{F_1(L, G, \ell, g-t)}_{\text{perturbating function}}}$$

in the form of the "general problem of dynamics"

HILL REGIONS



POINCARÉ COORDINATES

$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{defined and}\\ \text{analytic}\end{array}\right\} \text{at circulars } (x_1=0 \text{ or } x_2=0) \\ \text{singular at collisions } (x_1=x_2) \end{array}\right.$

$$\boxed{-C \ll 0}$$

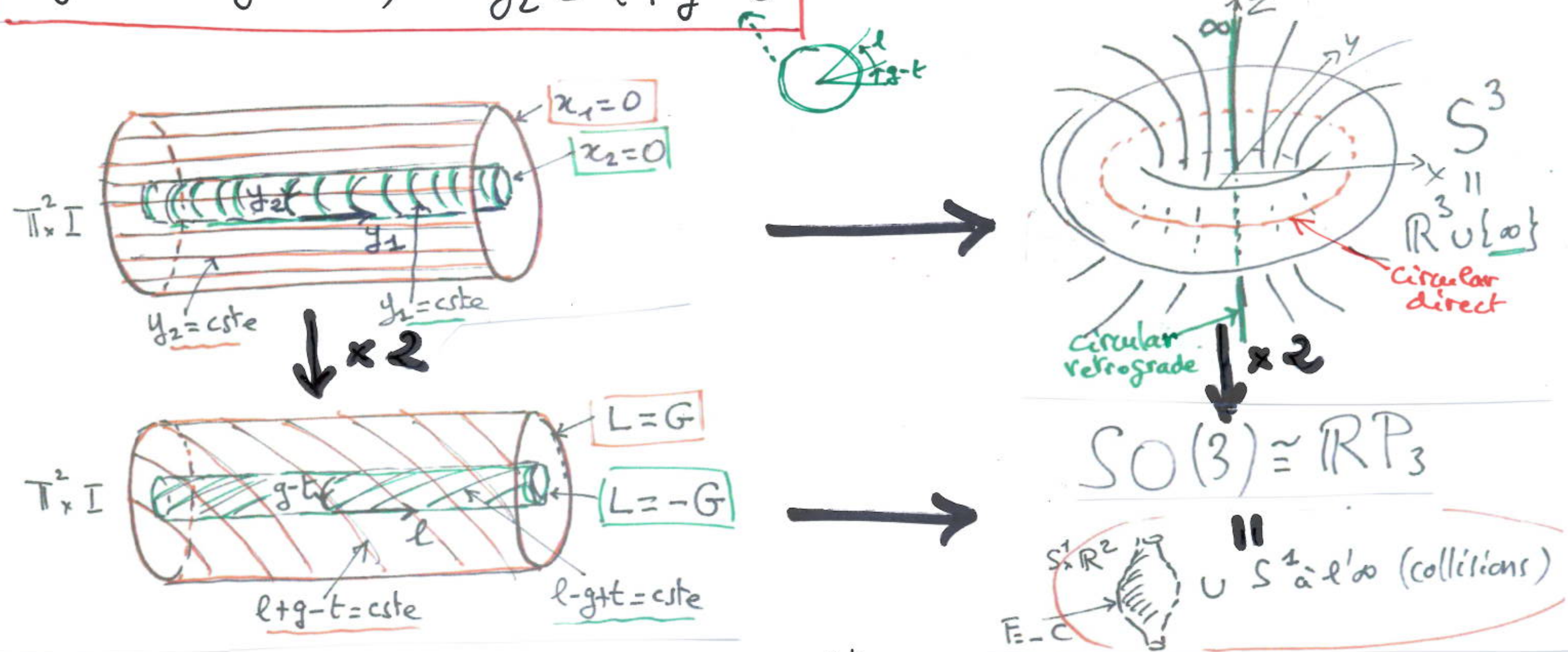
$$\| $$

$$-\frac{2}{(x_1+x_2)^2}-\frac{x_2-x_1}{2}+O(\mu)$$

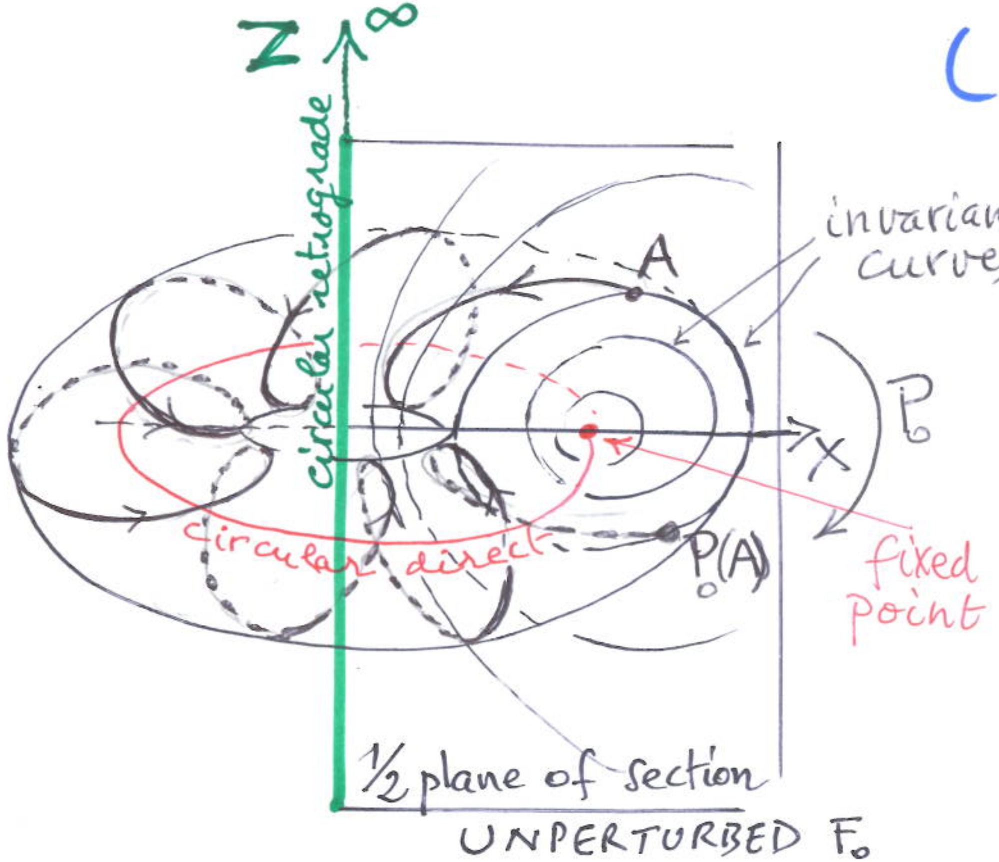
$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1 = L-G, & x_2 = L+G \\ 2y_1 = \ell-g+t, & 2y_2 = \ell+g-t \end{array}}$$

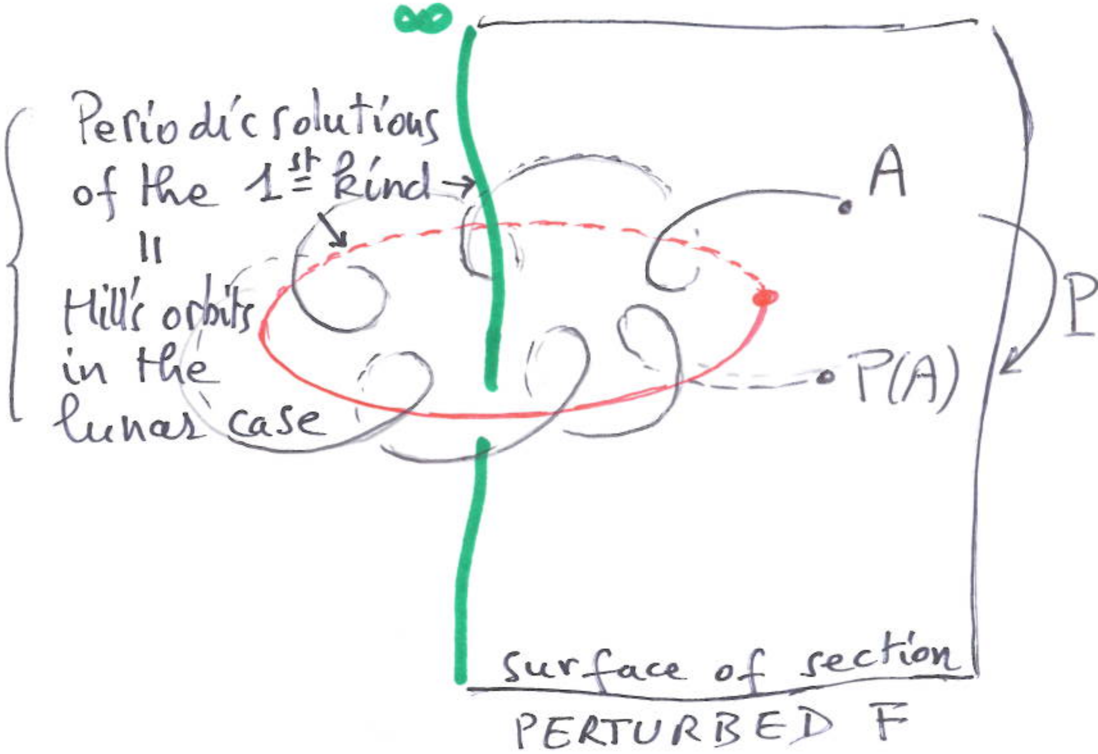
vol. III §§ 313 / 392

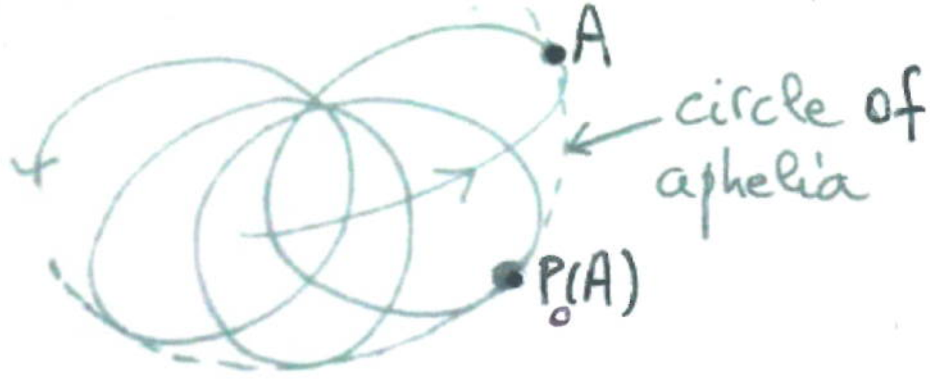
$$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{x_2}\cos y_2}{\sqrt{x_2+4x_1}-2\sqrt{x_1}\cos y_1} \\ Y &= \frac{\sqrt{x_2}\sin y_2}{\sqrt{x_2+4x_1}-2\sqrt{x_1}\cos y_1} \\ Z &= \frac{2\sqrt{x_1}\sin y_1}{\sqrt{x_2+4x_1}-2\sqrt{x_1}\cos y_1} \end{aligned}}$$



FIRST RETURN MAP
(théorie des conséquents)







P_0, P = first return = stroboscope

2 $F_0(L,G) = -\frac{1}{2L^2} - G$

is degenerate (Hessian $= 0$)

BUT

Return map is non-degenerate

because independent of time parametrization

$\Updownarrow$

Poincaré's trick: replace F_0 by $\exp F_0$

THE INTEGRAL INVARIANT

While new first integrals do not exist, infinitesimal first integrals (= first integrals of the variational equations along an orbit) do exist!

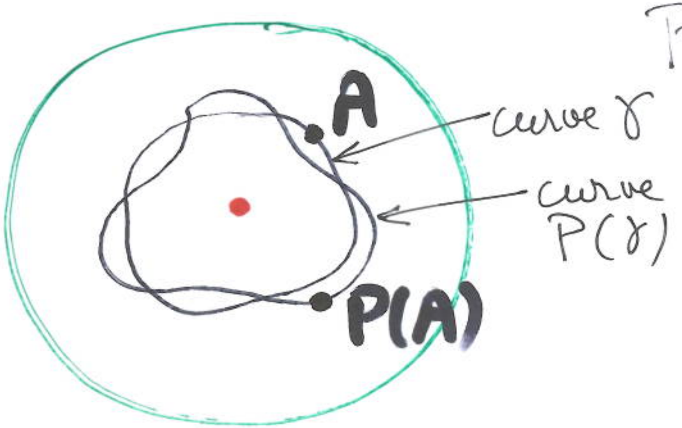
⇓

The first return map P preserves a smooth measure with finite total mass.

[Vol III
Ch. XXII

⇓

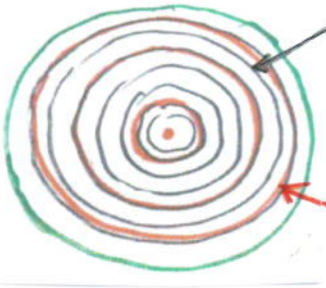
P possesses the intersection property



To-day, we say that the canonical equations preserve the symplectic structure of the phase space

LOOKING FOR STABILITY ...

UNPERTURBED MOTION

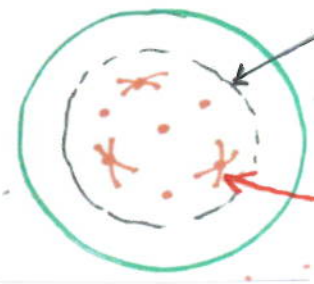


Dense ∞ty of invariant curves
→ families of quasi-periodic solutions

Dense ∞ty of invariant curves
→ families of periodic solutions

CONVERGENCE OF LINDSTEDT SERIES WITH VARIABLE FREQUENCIES

PERTURBED MOTION



??? Existence of invariant curves
→ families of quasi-periodic solutions ???
if YES ⇒ K.A.M. stability

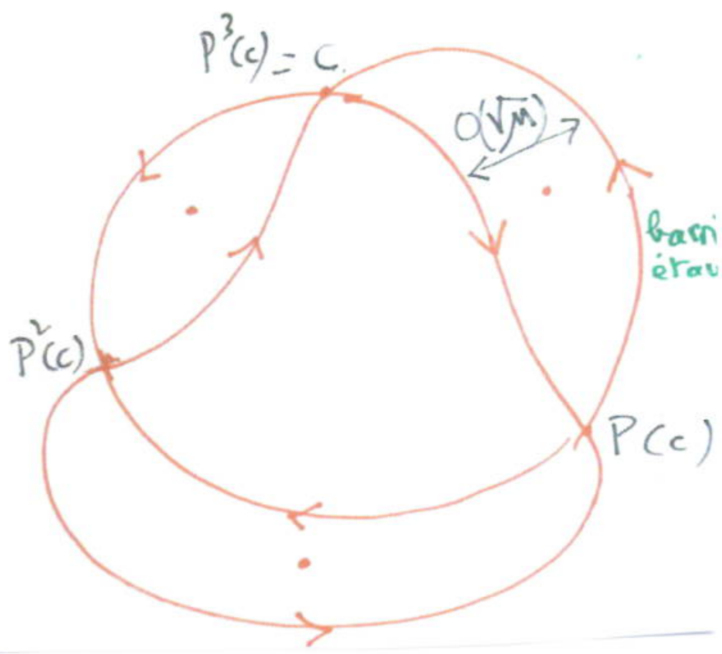
Possibility of cv of Lindstedt series with well chosen fixed frequencies ??? § 149

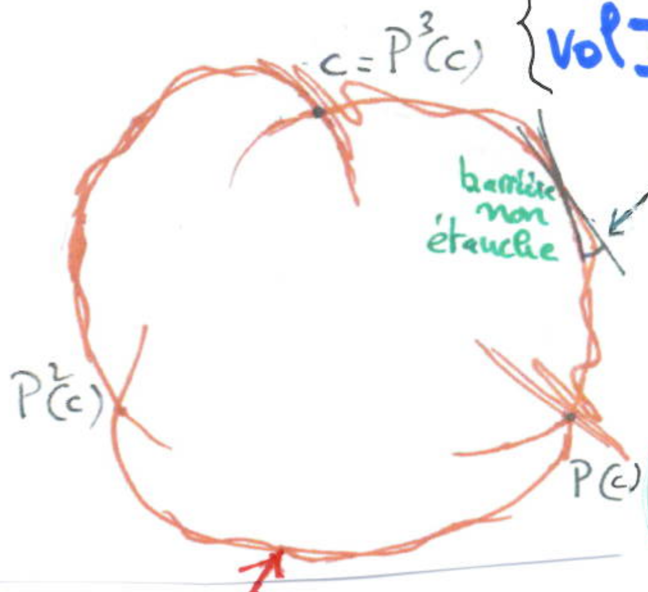
NON Existence of invariant curves
→ families of periodic solutions
BUT : "generic" periodic solutions

DIVERGENCE OF LINDSTEDT SERIES WITH VARIABLE FREQUENCIES

Vol. II, Ch. XIII

THE ERROR IN THE MEMOIR





added chapter in the corrected memoir and **Vol II, § 226**

exponentially small angle

$\Downarrow$

invisible at any order in perturbat[ion] series

divergent series in $\sqrt{\mu}$

FORMALLY INTEGRABLE ... BUT NOT INTEGRABLE !

(formal coincidence of $W^s(c)$ and $W^u(P(c))$)

TRANSVERSE HOMOCLINIC SOLUTIONS $W^s(c) \pitchfork W^u(P(c))$

$\Rightarrow$ **DIVERGENCE OF BOHLIN SERIES**

EXPONENTIALLY SMALL ANGLES : an example

Vol. II, **225.** Nous avons vu au n° **212** que les séries auxquelles conduit la méthode de M. Bohlin sont généralement divergentes et j'ai cherché à expliquer le mécanisme de cette divergence. Je crois devoir revenir sur ce sujet et étudier avec quelques détails un exemple simple qui fera mieux comprendre ce mécanisme. Soit

$$-\mathrm{F} = p + q^2 - \underline{\underline{2\mu}} \sin^2\frac{y}{2} - \underline{\underline{\mu\varepsilon}}\varphi(y)\cos x,$$

decoupling
$\mu\varepsilon \ll \mu$

où $(p, x; q, y)$ sont deux paires de variables conjuguées, $\varphi(y)$ une fonction périodique de y de période 2π et où μ et ε sont deux constantes que je supposerai très petites.

Mettons en évidence les solutions particulières remarquables. Nous avons d'abord la solution simple

$$x = t, \quad p = o, \quad y = o, \quad q = o,$$

qui est une *solution périodique*. Voyons quelles sont les solutions asymptotiques correspondantes.

§226 Terms in ε:

Ainsi, bien que les fonctions ψ et ψ' ne soient pas égales, leurs développements formels suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ sont identiques. C'est assez dire que ces développements ne sont pas convergents.

Cela montre toutefois que si μ est considéré comme un infiniment petit du premier ordre, la différence $\psi - \psi'$ sera un infiniment petit d'ordre infini, comme est, par exemple, $e^{-\frac{1}{\mu}}$.

Et, en effet, dans le cas particulier où $\varphi(y) = \sin y$, on a

$$\theta\left(-\frac{1}{\sqrt{8\mu}}\right) = \frac{-i\sqrt{\frac{\mu}{2}}}{e^{\frac{\pi}{4\sqrt{2\mu}}} + e^{-\frac{\pi}{4\sqrt{2\mu}}}},$$

ce qui montre que les différences $\psi - \psi'$ et $S_1 - S'_1$ sont du même ordre de grandeur que

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{-\frac{\pi}{4\sqrt{2\mu}}}.$$

TOME III § 397

397. Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.

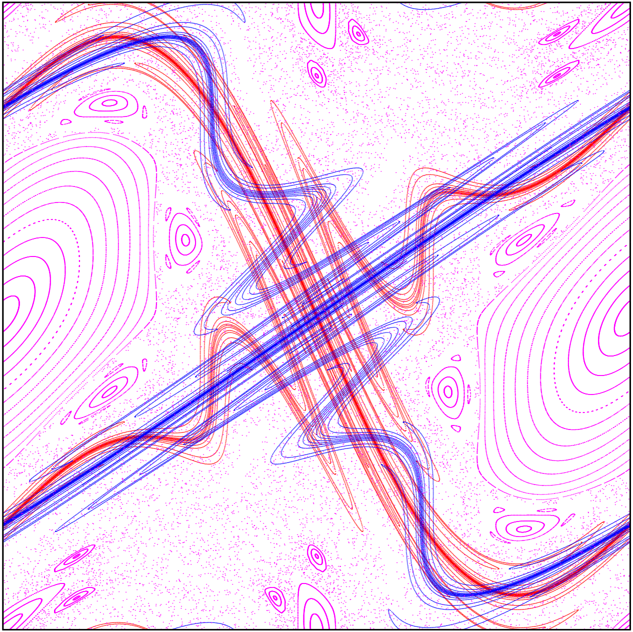


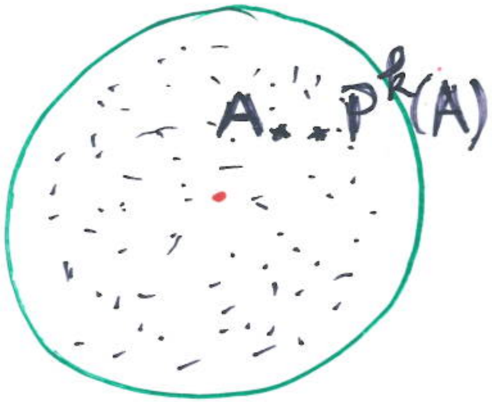
Figure : Carles Simo

THE ERSATZ OF THE LOST STABILITY :
THE RECURRENCE THEOREM

Vol. III
Ch. XXVI
STABILITY
"à la Poisson"

alludes to the return of the values of the planetary semi-major axes
(absence of purely secular terms when the cubes of the masses are neglected)

Vol II § 150
"Comparison with the old methods"



For almost all initial condition A, the orbit $\{P^k(A)\}_{k\in\mathbb{N}}$ comes arbitrarily close to A

Before Borel and Lebesgue, POINCARÉ UNDERSTANDS PERFECTLY THE ZERO MEASURE SETS !!!

The recurrence theorem is the ancestor of ERGODIC THEORY

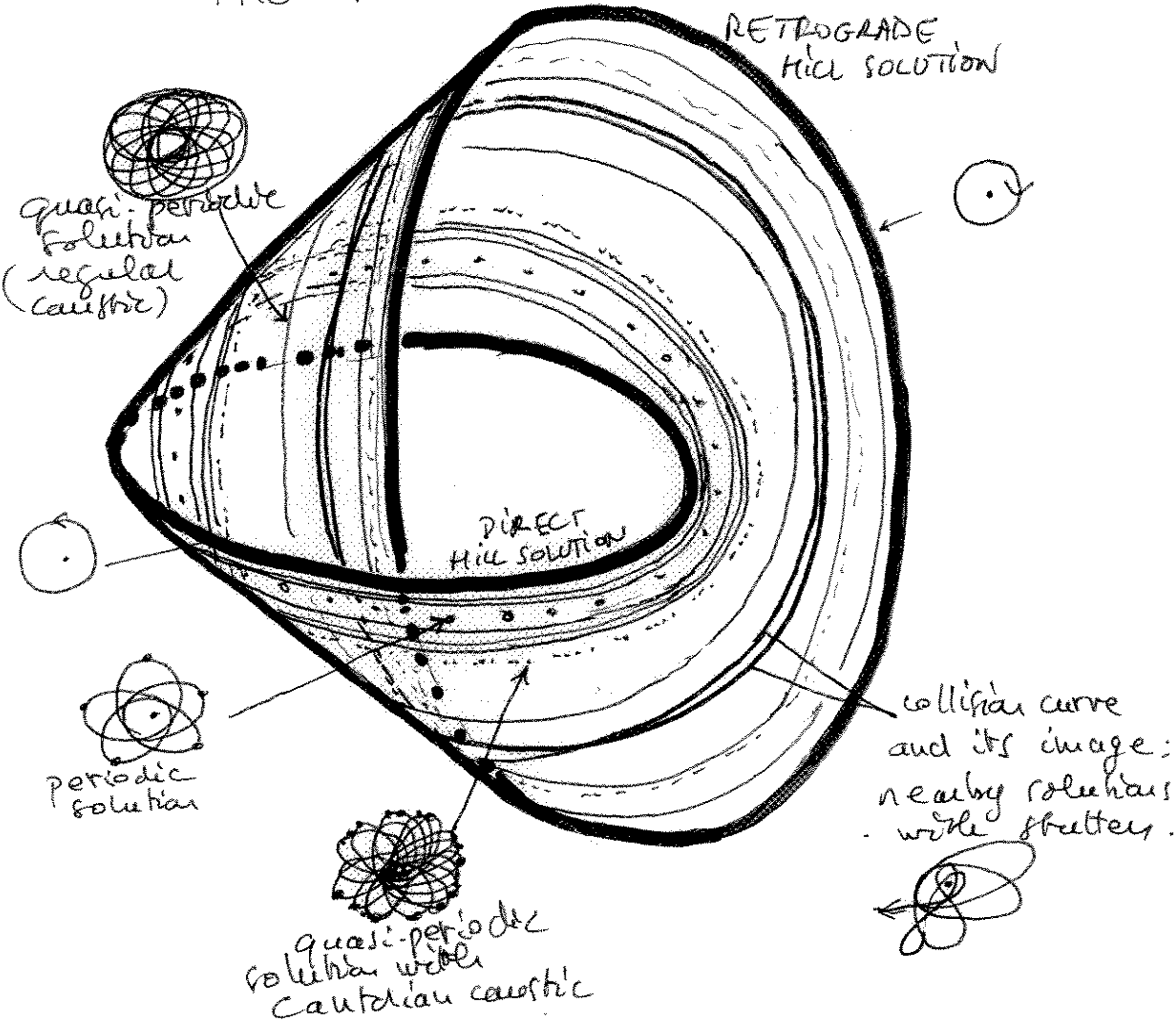
Mémoire corrigé
1890
Introduction

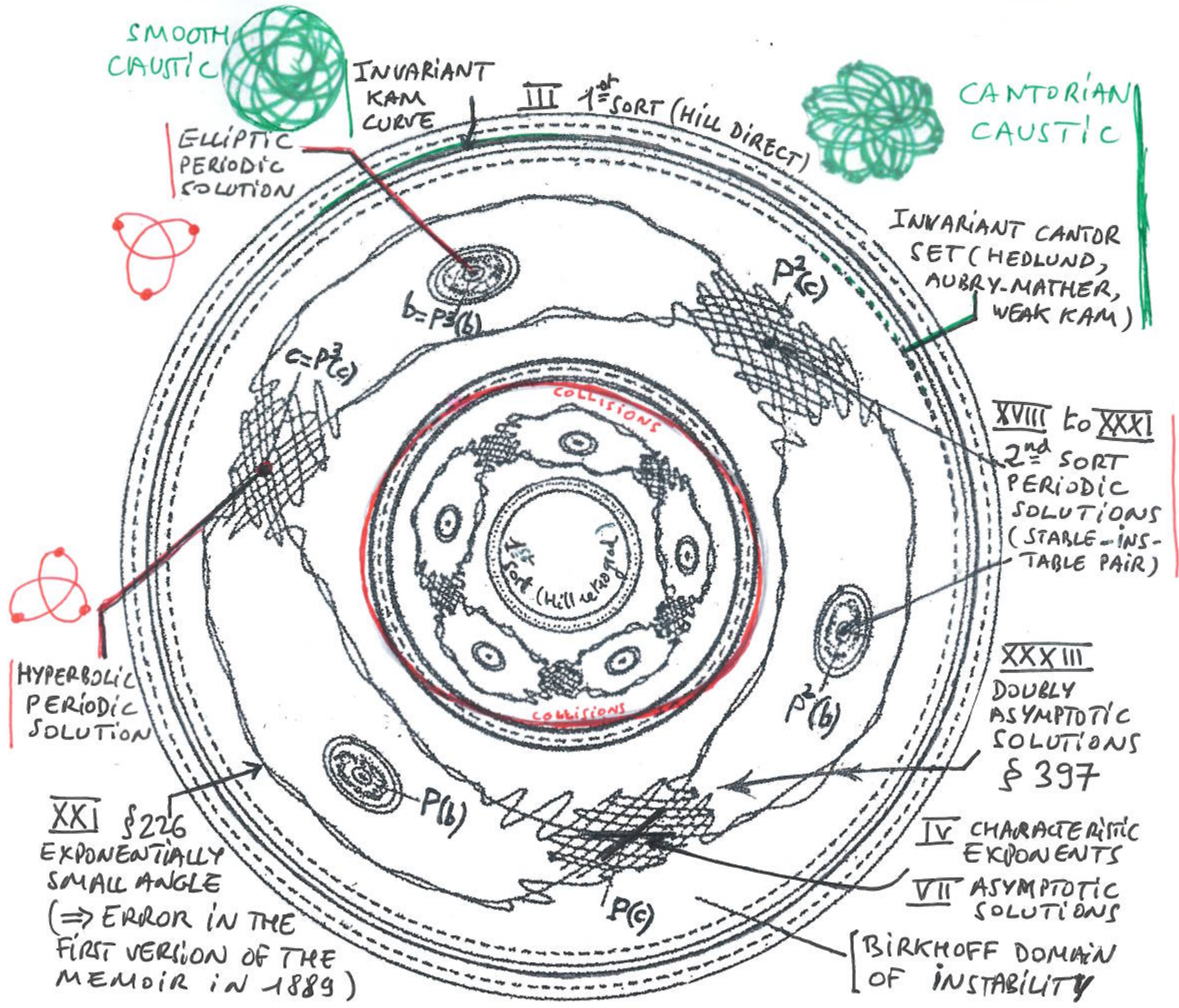
Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. Je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles.

MNMC Tome III

Ch. XXVI

Si donc Poisson a cru pouvoir répondre affirmativement à la question de la stabilité telle qu'il l'avait posée, bien qu'il eût exclu les cas où le rapport des moyens mouvements est commensurable, nous aurons de même le droit de regarder comme démontrée la stabilité telle que nous la définissons, bien que nous soyons forcés d'exclure les molécules exceptionnelles dont nous venons de parler.


RETROGRADE HILL SOLUTION
quasi-periodic solution (regular caustic)
DIRECT HILL SOLUTION
periodic solution
quasi-periodic solution with Cantorian caustic
collision curve and its image: nearby solutions will scatter.



SMOOTH CAUSTIC
INVARIANT KAM CURVE
III 1st SORT (HILL DIRECT)
CANTORIAN CAUSTIC
ELLIPTIC PERIODIC SOLUTION
INVARIANT CANTOR SET (HEDLUND, AUBRY-MATHER, WEAK KAM)
$P^2(c)$
$b=P^3(b)$
$c=P^3(c)$
COLLISIONS
XVIII to XXXI 2nd SORT PERIODIC SOLUTIONS (STABLE-INSTABLE PAIR)
1st sort (Hill retrograd)
HYPERBOLIC PERIODIC SOLUTION
XXXIII DOUBLY ASYMPTOTIC SOLUTIONS § 397
$P^2(b)$
COLLISIONS
$P(b)$
XXI §226 EXPONENTIALLY SMALL ANGLE (⇒ ERROR IN THE FIRST VERSION OF THE MEMOIR IN 1889)
IV CHARACTERISTIC EXPONENTS
VII ASYMPTOTIC SOLUTIONS
$P(c)$
BIRKHOFF DOMAIN OF INSTABILITY

WHY STUDY THE THREE-BODY PROBLEM?

G. DARBOUX'S ANSWER (December 15, 1913)

Poincaré ne pouvait pas ne pas avoir conscience de la haute valeur de ses écrits ; d'autres auraient réclamé des récompenses, lui ne demandait rien. Nous le regardions tous comme le plus fort d'entre nous. Il n'a jamais cherché à nous devancer. Nul ne pouvait prévoir les vides nombreux que la mort allait faire dans la section de Géométrie. Pour le faire arriver plus vite, pour lui ménager une place dans la section d'Astronomie, on lui signalait les applications que les théories par lui découvertes pouvaient avoir en Mécanique céleste. Il suivait docilement ces indications, s'occupait du problème des trois corps, des figures des corps célestes, et trouvait tout naturel de laisser passer devant lui tous les anciens.[169]

[169] Poincaré could not be unaware of the high value of his writings; others would have claimed awards, he asked nothing. We all considered him as the strongest of us all. He never attempted overtaking us. No one could foresee the many gaps that death woud cause in the Geometry section. In order to make him arrive faster, to secure for him a seat in the Astronomy section, we pointed to him the applications that the theories he had discovered could have in Celestial Mechanics. He was obediently following these indications, handling the Three-Body Problem, the figures of celestial bodies, and finding it quite natural to let pass before him the elders.

Three body problem

Alain Chenciner (2007), Scholarpedia, 2(10):2111. doi:10.4249/scholarpedia.2111 revision #126938 [link to/cite this article]

Alain Chenciner, Math Dept Paris 7 University and IMCCE (Paris Observatory), France

The problem is to determine the possible motions of three point masses m_1 , m_2 , and m_3 , which attract each other according to Newton's law of inverse squares. It started with the perturbative studies of Newton himself on the *inequalities* of the lunar motion[1]. In the 1740s it was constituted as the search for solutions (or at least approximate solutions) of a system of ordinary differential equations by the works of Euler, Clairaut and d'Alembert (with in particular the explanation by Clairaut of the motion of the lunar apogee). Much developed by Lagrange, Laplace and their followers, the mathematical theory entered a new era at the end of the 19th century with the works of Poincaré and since the 1950's with the development of computers. While the two-body problem is integrable and its solutions completely understood (see [2],[AKN],[Al],[BP]), solutions of the **three-body problem** may be of an arbitrary complexity and are very far from being completely understood.

Contents [hide]

ADVERTISING

Ce qui limite le vrai,
ce n'est pas le faux,
c'est l'insignifiant

René Thom

in "Prédire n'est pas expliquer"
Eshel, Paris 1991, p. 132

[What limits the true,
it is not the false,
it is the insignificant]