# Poincaré et l'uniformisation

François Béguin

Université Paris-Nord

Séminaire Poincaré du 24 novembre 2012

Tout d'abord, un grand merci à Henri-Paul de Saint-Gervais, sans qui je n'aurais certainement pas pu faire cet exposé.

# 0. Le problème de l'uniformisation

Dès le début du XIXème siècle, les mathématiciens ont été confrontés à des *fonctions multiformes* dans le domaine complexe. Par exemple, lorsqu'on essaie de calculer des primitives comme

$$f(z) := \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\xi}.$$

# 0. Le problème de l'uniformisation

Dès le début du XIXème siècle, les mathématiciens ont été confrontés à des *fonctions multiformes* dans le domaine complexe. Par exemple, lorsqu'on essaie de calculer des primitives comme

$$f(z) := \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Comment résoudre le problème posé par ces multiformités ?

*Uniformiser* une fonction multiforme $z \mapsto f(z)$, c'est remplacer trouver une nouvelle variable $w$ telle que $w \mapsto z(w)$ et $w \mapsto f(w)$ soit de *vraies* fonctions (*i.e.* des fonctions uniformes).

Autrement dit, c'est trouver un *paramétrage* $w \mapsto z(w)$ du domaine de $f$, tel que $f$ soit une fonction uniforme de $w$.

# 0. Le problème de l'uniformisation

Considérons deux variables complexes $x$ et $y$ reliée par une relation algébrique, disons

$$y^2 - x^7 + 1 = 0.$$

Alors $y$ est une fonction multiforme de $x$ (et $x$ une fonction multiforme de $y$).

# 0. Le problème de l'uniformisation

Considérons deux variables complexes $x$ et $y$ reliée par une relation algébrique, disons

$$y^2 - x^7 + 1 = 0.$$

Alors $y$ est une fonction multiforme de $x$ (et $x$ une fonction multiforme de $y$).

*Uniformiser* la relation algébrique $y^2 - x^7 + 1 = 0$ (ou uniformiser la courbe d'équation $y^2 - x^7 + 1 = 0$) c'est trouver une variable $w$ tel que $x$ et $y$ soient des fonctions (holomorphes) uniformes de $w$.

# 0. Le problème de l'uniformisation

Considérons deux variables complexes $x$ et $y$ reliée par une relation algébrique, disons

$$y^2 - x^7 + 1 = 0.$$

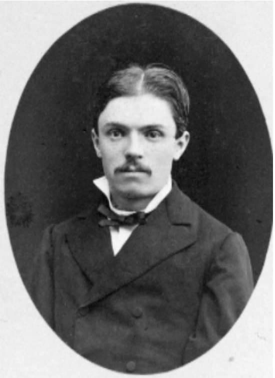
Alors $y$ est une fonction multiforme de $x$ (et $x$ une fonction multiforme de $y$).

*Uniformiser* la relation algébrique $y^2 - x^7 + 1 = 0$ (ou uniformiser la courbe d'équation $y^2 - x^7 + 1 = 0$) c'est trouver une variable $w$ tel que $x$ et $y$ soient des fonctions (holomorphes) uniformes de $w$.

Cela revient à *paramétrer* la courbe d'équation $y^2 - x^7 + 1 = 0$ : uniformiser une courbe, c'est passer d'une *représentation implicite* (une équation) à une *représentation explicite* (un paramétrage).

# 0. Poincaré et les équations différentielles linéaires d'ordre 2

1880. Poincaré est un jeune homme de 26 ans, chargé de cours à Caen. Il s'intéresse aux équations différentielles.



Un article de Fuchs attire son attention sur les *équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients rationnels*.

## 0. Poincaré et les équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère des équations différentielle linéaire du type

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi(x)v = 0.$$

# 0. Poincaré et les équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère des équations différentielle linéaire du type

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi(x)v = 0.$$

- Les solutions de ces équations sont multiformes : quand on fait le tour d'un pôle d'un coefficient, la solution change de valeur.

# 0. Poincaré et les équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère des équations différentielle linéaire du type

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi(x)v = 0.$$

- Les solutions de ces équations sont multiformes : quand on fait le tour d'un pôle d'un coefficient, la solution change de valeur.
- Pour connaître, les solutions d'une telle équation, il suffit de connaître le quotient de deux solutions $w = v_1/v_2$.
- Ce quotient $w$ est lui aussi multiforme.

# 0. Poincaré et les équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère des équations différentielle linéaire du type

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi(x)v = 0.$$

- Les solutions de ces équations sont multiformes : quand on fait le tour d'un pôle d'un coefficient, la solution change de valeur.
- Pour connaître, les solutions d'une telle équation, il suffit de connaître le quotient de deux solutions $w = v_1/v_2$.
- Ce quotient $w$ est lui aussi multiforme.
- L'analogie avec les fonctions elliptiques poussent à considérer l'inverse de $w$ (en espérant qu'il soit uniforme).

# 0. Poincaré et les équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère des équations différentielle linéaire du type

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi(x) v = 0.$$

- Les solutions de ces équations sont multiformes : quand on fait le tour d'un pôle d'un coefficient, la solution change de valeur.
- Pour connaître, les solutions d'une telle équation, il suffit de connaître le quotient de deux solutions $w = v_1/v_2$.
- Ce quotient $w$ est lui aussi multiforme.
- L'analogie avec les fonctions elliptiques poussent à considérer l'inverse de $w$ (en espérant qu'il soit uniforme).
- La multiformité de $w$ se traduira par une périodicité de l'inverse $w^{-1}$.

# 1. L'uniformisation de la sphère privée de points réels

Poincaré cherche d'abord à montrer que (sauf cas trivial) l'on ne *peut pas* uniformiser les quotients de solutions d'équations différentielles. Mais...

# 1. L'uniformisation de la sphère privée de points réels

Février 1881. Poincaré publie son premier résultat d'uniformisation.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fuchsiennes.*
Note de M. H. POINCARÉ.

« J'ai étudié en particulier les fonctions fuchsiennes $f(z)$ telles que, si l'on pose

$$x = f(z), \quad y_1 = \sqrt{\frac{df}{dz}}, \quad y_2 = z\sqrt{\frac{df}{dz}},$$

$y_1$ et $y_2$ satisfassent à une équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y\,\varphi(x),$$

$\varphi$ étant rationnel en $x$.

» J'ai reconnu : 1° que les points singuliers de l'équation (1) qui sont les infinis de $\varphi(x)$ sont tous réels ; 2° que l'on peut choisir $f(z)$ de telle façon que ces infinis de $\varphi(x)$ soient aussi nombreux que l'on veut, et aient telles valeurs réelles que l'on veut.

» En introduisant les fonctions zétafuchsiennes qui correspondent à ces fonctions $f(z)$, on intègre *toutes les équations linéaires à coefficients rationnels dont tous les points singuliers sont réels.* »

# 1. L'uniformisation de la sphère privée de points réels

Autrement dit :

**Théorème (Poincaré 1881).** — *Quels que soient les points $x_1, \ldots, x_n$ sur l'axe réel ($n \geq 3$), il existe une fonction rationnelle $\varphi$ tel que l'inverse du quotient de deux solutions de l'équation*

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi(x)v = 0$$

*définisse un revêtement de $\widehat{\mathbb{C}} - \{x_1, \ldots, x_n\}$ par le disque unité $\mathbb{D}$.*

# 1. L'uniformisation de la sphère privée de points réels

En particulier :

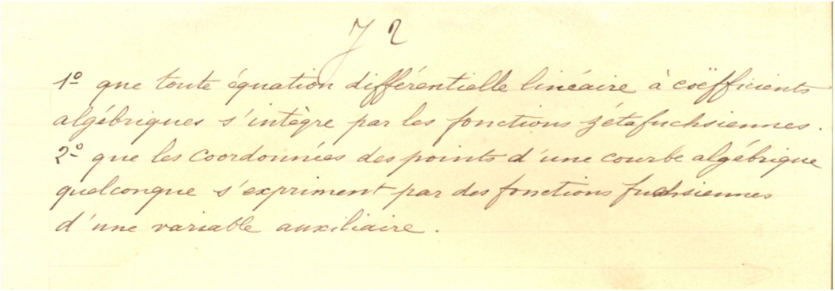
**Théorème (Poincaré 1881).** — *Quels que soient les points $x_1, \ldots, x_n$ sur l'axe réel, $\widehat{\mathbb{C}} - \{x_1, \ldots, x_n\}$ est biholomorphe au quotient du disque unité par un groupe fuchsien.*

# 1. L'uniformisation de la sphère privée de points réels

La preuve utilise une version très simple et embryonnaire de ce qui deviendra la *méthode de continuité*.

# 2. L'uniformisation à un nombre fini de points près

Août 1881. Poincaré est très fier d'annoncer qu'il sait uniformiser *toutes les courbes algébriques*.


72

1° que toute équation différentielle linéaire à coëfficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes.
2° que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire.

# 2. L'uniformisation à un nombre fini de points près

En fait, Poincaré joue un peu sur les mots...

# 2. L'uniformisation à un nombre fini de points près

En fait, Poincaré joue un peu sur les mots... Voici ce qu'il montre :

**Théorème (Poincaré 1881).** — *Si $C$ est une courbe algébrique, il existe des points $x_1, \ldots, x_n$ sur $C$ tel que $C - \{x_1, \ldots, x_n\}$ est uniformisée par le disque unité.*.

Autrement dit, il sait uniformiser toute courbe algébrique *à un nombre fini de points près*.

# 3. L'uniformisation des courbes algébriques

Quand Félix Klein lit les Notes évoquées ci-dessus, il est révolté par l'ignorance de Poincaré...

# 3. L'uniformisation des courbes algébriques

Quand Félix Klein lit les Notes évoquées ci-dessus, il est révolté par l'ignorance de Poincaré...mais aussi ébloui par ses résultats !

# 3. L'uniformisation des courbes algébriques

Quand Félix Klein lit les Notes évoquées ci-dessus, il est révolté par l'ignorance de Poincaré...mais aussi ébloui par ses résultats !

S'engage alors une correspondance entre les deux mathématiciens qui acquièrent rapidement la conviction que l'on peut uniformiser toutes les courbes algébriques (cette fois-ci « pour de vrai », sans leur ôter le moindre point).

# 3. L'uniformisation des courbes algébriques

Quand Félix Klein lit les Notes évoquées ci-dessus, il est révolté par l'ignorance de Poincaré...mais aussi ébloui par ses résultats !

S'engage alors une correspondance entre les deux mathématiciens qui acquièrent rapidement la conviction que l'on peut uniformiser toutes les courbes algébriques (cette fois-ci « pour de vrai », sans leur ôter le moindre point).

Il faudra néanmoins attendre 1884 pour que Poincaré ne publie sa preuve... pas très convaincante (comme celle de Klein).

# 3. L'uniformisation des courbes algébriques

## SUR LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

Dans trois mémoires (Acta Mathematica T. 1, p. 1—62: *Sur les groupes fuchsiens;* Acta T. 1, p. 193—294: *Sur les fonctions fuchsiennes;* Acta T. 3, p. 49—92: *Sur les groupes kleinéens*) j'ai étudié les groupes discontinus formés par des substitutions linéaires et les fonctions uniformes qui ne sont pas altérées par les substitutions de ces groupes. Avant de montrer comment ces fonctions et d'autres analogues donnent les intégrales des équations linéaires à coëfficients algébriques, il est nécessaire de résoudre deux problèmes importants:

1°. Étant donnée une équation linéaire à coëfficients algébriques, déterminer son groupe.

2°. Étant donnée une équation linéaire du 2[d] ordre dépendant de certains paramètres arbitraires, disposer de ces paramètres de manière que le groupe de l'équation soit fuchsien.

Ainsi nous pouvons exprimer les intégrales d'une équation linéaire à coëfficients algébriques par des fonctions uniformes d'une variable $z$.

Il reste à étudier les propriétés de ces fonctions uniformes et à les développer en séries. C'est ce que je ferai dans le prochain mémoire qui sera le dernier de cette série.

Paris, 20 Octobre 1883.

# 4. L'uniformisation des fonctions

En 1882, Poincaré et Klein estiment tous les deux savoir uniformiser toutes les courbes algébriques.

Klein (épuisé par l'ascension de ce sommet ?) tombe malade. De son propre aveu, ce sera la fin de sa « période productive »... Il a 33 ans !

# 4. L'uniformisation des fonctions

En 1882, Poincaré et Klein estiment tous les deux savoir uniformiser toutes les courbes algébriques.

Klein (épuisé par l'ascension de ce sommet ?) tombe malade. De son propre aveu, ce sera la fin de sa « période productive »... Il a 33 ans !

Poincaré, lui, est déjà parti à la conquête de continents plus vastes. Il veut uniformiser *toutes* les surfaces de Riemann, algébriques ou pas.

# 4. L'uniformisation des fonctions

*Sur un théorème de la Théorie générale des fonctions;*
par M. H. Poincaré.

(Séance du 18 mai 1883.)

Voici le théorème que je me propose de démontrer :

*Soit $y$ une fonction analytique quelconque de $x$, non uniforme. On peut toujours trouver une variable $z$ telle que $x$ et $y$ soient fonctions uniformes de $z$.*

# 4. L'uniformisation des fonctions

En fait, Poincaré trouve un paramétrage $z \mapsto (x(z), y(z))$ qui est uniforme, mais pas localement injectif (*points de ramifications*).

C'est très bien du point de vue des fonctions.

# 4. L'uniformisation des fonctions

En fait, Poincaré trouve un paramétrage $z \mapsto (x(z), y(z))$ qui est uniforme, mais pas localement injectif (*points de ramifications*).

C'est très bien du point de vue des fonctions... mais guère satisfaisant du point de vue géométrique. Par ex., on uniformise le plan par le disque, via un paramétrage hautement non-injectif !

# 4. L'uniformisation des fonctions

En fait, Poincaré trouve un paramétrage $z \mapsto (x(z), y(z))$ qui est uniforme, mais pas localement injectif (*points de ramifications*).

C'est très bien du point de vue des fonctions... mais guère satisfaisant du point de vue géométrique. Par ex., on uniformise le plan par le disque, via un paramétrage hautement non-injectif !

Au passage, Poincaré invente *le revêtement universel* !

# 5. L'équation de Liouville

En 1890, la Société Royale des Sciences de Gottingen attire l'attention sur un méthode alternative pour uniformiser les surfaces de Riemann : résoudre l'équation de Liouville

$$\Delta u = 2e^u.$$

1. *Die Aufgabe der conformen Abbildung eines ebenen Bereiches auf ein Stück einer krummen Fläche, deren Krümmungmass überall den constanten Werth k besitz, hängt zusammen mit der Aufgabe, die partielle Differentialgleichung*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k\, e^u$$

*vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäss zu integriren.*

*Für diese Aufgabe kommen zunächst die von Riemann in seiner Theorie der Abelschen Functionen angegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen in Betracht.*

*Die Königliche Gesellschaft wünscht die Frage, ob es möglich ist, die angebene partielle Differentialgleichung für einen gegebenen Bereich unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der angegebenen Art zu integriren, vorausgesetzt, dass der Konstanten k negative Werthe beigelegt werden, vollständig beanwortet zu sehen.*

*Insbesondere wünscht die Königliche Gesellschaft den Fall der angeführten Aufgabe behandelt zu sehen, in welchen der betrachtete eben Bereich, eine geschlossene mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, während die Function u keine anderen als logarithmische Unstetigkiten annehmen soll.*

# 5. L'équation de Liouville

Picard publie dès 1890 un article dans lequel il résoud l'équation de Liouville sur un domaine plan. Puis divers addenda et errata en 1893, 1898, 1900, 1905...

En 1898, Poincaré publie sa propre réponse.

*Les fonctions fuchsiennes et l'équation* $\Delta u = e^u$;

**Par M. H. POINCARÉ.**

---

**I. — Introduction.**

Considérons une équation différentielle linéaire de la forme suivante

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \tag{1}$$

# 5. L'équation de Liouville

En fait, Poincaré ne considère pas exactement l'équation $\Delta u = 2e^u$, mais une version « intrinsèque » de cette équation.

# 5. L'équation de Liouville

En fait, Poincaré ne considère pas exactement l'équation $\Delta u = 2e^u$, mais une version « intrinsèque » de cette équation.

Étant donnée un surface de Riemann $S$, il fixe une métrique riemannienne $g$ (compatible avec la structure conforme), et considère l'équation

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi \tag{1}$$

# 5. L'équation de Liouville

En fait, Poincaré ne considère pas exactement l'équation $\Delta u = 2e^u$, mais une version « intrinsèque » de cette équation.

Étant donnée un surface de Riemann $S$, il fixe une métrique riemannienne $g$ (compatible avec la structure conforme), et considère l'équation

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi \tag{1}$$

Si $u$ est une solution de cette équation pour $\theta = 2$ et $\varphi$ est l'opposé de la courbure de $g$, alors la métrique $e^u g$ est à courbure constante $-1$. Donc $S$ est uniformisée par le disque.

# 5. L'équation de Liouville

En fait, Poincaré ne considère pas exactement l'équation $\Delta u = 2e^u$, mais une version « intrinsèque » de cette équation.

Étant donnée un surface de Riemann $S$, il fixe une métrique riemannienne $g$ (compatible avec la structure conforme), et considère l'équation

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi \tag{1}$$

Si $u$ est une solution de cette équation pour $\theta = 2$ et $\varphi$ est l'opposé de la courbure de $g$, alors la métrique $e^u g$ est à courbure constante $-1$. Donc $S$ est uniformisée par le disque.

L'équation (1) est non-linéaire. Poincaré ne dispose à l'époque d'aucun outil théorique pour résoudre une telle équation...

# 5. L'équation de Liouville

L'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$ est non-linéaire. Poincaré ne dispose à l'époque d'aucun outil théorique pour résoudre une telle équation. Et pourtant :

En résumé, *voici les conditions pour que l'équation* (1) *soit intégrable :*

1° On doit avoir

$$\int \varphi \, d\omega > 0;$$

2° Le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ doit avoir partout une valeur finie et déterminée;

3° Cette valeur, qui peut être quelconque aux sommets de deuxième espèce, doit être positive et différente de zéro aux sommets de troisième espèce.

# 5. L'équation de Liouville

En particulier :

**Théorème (Poincaré 1898).** — Soit $S$ une surface de Riemann fermée de genre $\geq 2$, et $g$ une métrique sur $S$ compatible avec la structure holomorphe. Quelles que soient les fonctions $\theta, \varphi : S \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ avec $\theta > 0$ et $\int \varphi > 0$, l'équation

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$$

admet une (unique) solution $u : S \to \mathbb{R}$.

Par suite, $S$ admet une métrique à courbure $-1$ conforme à $g$, et $S$ est uniformisée par le disque.

# 6. Le « grand » théorème d'uniformisation

1907. Poincaré est un mathématicien-physicien-philosophe universellement célébré. Il est membre de dizaine d'académies. On le solicite de toutes parts pour donner des conférences sur l'avenir des Mathématiques, l'évolution des lois, ou la Morale.

# 6. Le « grand » théorème d'uniformisation

Poincaré publie — la même année que Paul Koebe — une preuve du théorème d'uniformisation que nous connaissons aujourd'hui.



## SUR L'UNIFORMISATION DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

H. POINCARÉ

à PARIS.

### § 1. Introduction.

Dans un mémoire intitulé «Sur un théorème de la théorie générale des fonctions» (Bulletin de la Société Mathématique de France, tome 11, 1883), j'ai démontré que plusieurs fonctions analytiques d'une même variable indépendante peuvent toujours être égalées à des fonctions *uniformes* d'une même variable.

# 6. Le « grand » théorème d'uniformisation

*En résumé, un domaine D simplement connexe quelconque est susceptible de représentation conforme soit sur un cercle* (§ 13 et 14) *soit une sphère pointée* (§ 15).

# 6. Le « grand » théorème d'uniformisation

*En résumé, un domaine D simplement connexe quelconque est susceptible de représentation conforme soit sur un cercle* (§ 13 et 14) *soit une sphère pointée* (§ 15).

Autrement dit :

**Théorème (Poincaré, Koebe 1907).** — *Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à la sphère de Riemann, au plan complexe, ou au disque unité.*

# 6. Le « grand » théorème d'uniformisation

Soit $S$ une surface de Riemann simplement connexe non-compacte. Montrer que $S$ est biholomorphe au plan ou au disque revient essentiellement à construire une *majorante de Green* sur $S$.

**Définition.** – Une *majorante de Green* est une fonction $u : S \to \mathbb{R}$

- qui possède une singularité logarithmique : il existe $p_0 \in S$ tel que $u(p) + \log|z(p) - z(p_0)|$ est borné ;
- qui est harmonique partout ailleurs : $\Delta u = 0$ sur $S - \{p_0\}$ ;
- qui est positive : $u \geq 0$.

# 6. Le « grand » théorème d'uniformisation

Pour construire une majorante de Green, Poincaré se laisse guider par une expérience de pensée électrostatique.
C'est la *méthode du balayage*.

# Un siècle plus tard...
# Sait-on enfin calculer des uniformisantes ?

## Liouville theory, $\mathcal{N} = 2$ gauge theories and accessory parameters



**Franco Ferrari,**[a] **Marcin Piątek**[a,b]

[a] *Institute of Physics and CASA*, University of Szczecin, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin, Poland*

[b] *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, 141980 Dubna, Russia*

*E-mail:* ferrari@fermi.fiz.univ.szczecin.pl, piatek@fermi.fiz.univ.szczecin.pl

Abstract: The correspondence between the semiclassical limit of the DOZZ quantum Liouville theory and the Nekrasov–Shatashvili limit of the $\mathcal{N} = 2$ ($\Omega$-deformed) U(2) super–Yang–Mills theories is used to calculate the unknown accessory parameter of the Fuchsian uniformization of the 4-punctured sphere. The computation is based on the saddle point method. This allows to find an analytic expression for the $N_f = 4$, U(2) instanton twisted superpotential and, in turn, to sum up the 4-point classical block. It is well known that the critical value of the Liouville action functional is the generating function of the accessory parameters. This statement and the factorization property of the 4-point action allow to express the unknown accessory parameter as the derivative of the 4-point classical block